GEOMETRÍA DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS

MIGUEL C. MUÑOZ-LECANDA *,
NARCISO ROMÁN-ROY ♯ †
Departamento de Matemática Aplicada IV
Edificio C-3, Campus Norte UPC.
C/ Jordi Girona 1. E-08034 BARCELONA. SPAIN

April 13, 2010

* **e**-*mail*: MATMCML@MA4.UPC.EDU
† **e**-*mail*: NRR@MA4.UPC.EDU

Contents

Presentación

Introducción

Salvo en algún caso específico que se señalará, a lo largo del trabajo sólo se considerarán sistemas físicos *independientes del tiempo*, esto es, *autónomos*.

A lo largo de este trabajo, si M es una variedad diferencial, se designarán por $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de los campos vectoriales, por $\Omega^p(M)$ el de las p-formas diferenciales en M (siendo $\Omega^0(M) = \mathrm{C}^\infty(M)$ las funciones de clase C^∞), y por $Z^p(M)$ al conjunto de p-formas diferenciales cerradas en M. Como ya es norma, se asume que todas las variedades diferenciales y estructuras geométricas que aparecen son de clase C^∞. Además se supondrá que todas las variedades y subvariedades son de dimensión finita y conexas. También se asumirá la hipótesis de que todas las aplicaciones tienen rango constante en las variedades o subvariedades donde se hallen definidas. Finalmente, salvo indicación contraria, se adopta el convenio de sumación de los índices repetidos cruzados.

1 Sistemas dinámicos Newtonianos

En esta sección se va a desarrollar un formalismo geométrico para la descripción de los sistemas dinámicos de la *Mecánica Clásica* (esto es, *Newtoniana*).

1.1 Sistemas dinámicos en Mecánica Newtoniana

1.1.1 Fundamentos. Ecuaciones de Newton. Energía cinética

Desde el punto de vista geométrico, los sistemas mecánicos de la Física Newtoniana tienen unas características básicas comunes, que son las siguientes:

- El *espacio de configuraciones*, esto es, el formado por los puntos cuyas coordenadas describen los grados de libertad del sistema, es una variedad diferencial cuya dimensión es igual al número de estos grados de libertad (habitualmente $\mathbb{R}^n$ o un abierto de éste).
- Esa variedad está dotada de una *métrica de Riemann*.
- Se tiene seleccionado un campo vectorial, el *campo de fuerza* (alguna magnitud equivalente; esto es, una *forma de trabajo*) que determina las trayectorias dinámicas del sistema.

Basándonos en estas ideas, se define:

Definición 1 *Un* sistema dinánico Newtoniano *(o* mecánico*) es una terna* (M, g, ω)*, donde:*

- M *es una variedad diferencial (*$\dim M = m$*).*
- g *es una* métrica de Riemann *en* M*. De ahí* (M, g) *es una variedad de Riemann.*
- ω *es una 1-forma diferencial en* M*, que se denomina* forma de trabajo*.*

Dado que g *es una métrica de Riemann, la forma de trabajo* ω *tiene asociado un único campo vectorial* $\mathrm{F} \in \mathfrak{X}(M)$ *tal que* $i(\mathrm{F})g = \omega$*, que se denomina* campo de fuerzas *del sistema (así a veces el sistema se escribe* (M, g, F)*).*

Todo sistema mecánico Newtoniano (M, g, ω) define el siguiente problema: si ∇ es la *conexión de Levi-Civitta* asociada a g, se trata de hallar las curvas $\gamma\colon [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ tales que satisfacen la ecuación

$$\nabla_\gamma \dot{\gamma} = \mathrm{F} \circ \gamma \tag{1}$$

Admitimos, pues, el siguiente:

Postulado 1 (de la dinámica Newtoniana): *Las* trayectorias dinámicas *de un sistema dinámico Newtoniano* (M, g, F) *son las curvas* $\gamma\colon [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ *solución de la ecuación (1), que se denomina* ecuación dinámica *o* ecuaciones de Newton *del sistema.*

> **Comentario**:
>
> Obsérvese que, en el caso en que $\mathrm{F} = 0$, las trayectorias dinámicas son las geodésicas de la métrica g (*Ley de inercia*).

Si $(U, \varphi = (x^i))$ es una carta local en M, y $\{\Gamma^k_{ij}\}$ son los símbolos de Christoffel de ∇ en esa carta, la ecuación dinámica se expresa localmente en la forma

$$\ddot{\gamma}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = \mathrm{F}^k \circ \gamma \qquad (k = 1, \dots, m)$$

Si, además, $\omega = \omega_i \mathrm{d}x^i$ y $\mathrm{F} = \mathrm{F}^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, en esa carta, entonces resulta que

$$\omega_i = g_{ij}\mathrm{F}^j \quad , \quad \mathrm{F}^i = g^{ij}\omega_j$$

donde g^{ij} son las componentes de la matriz inversa de g en esa carta local.

Este formalismo puede presentarse en una *formulación dual* del siguiente modo:

Definición 2 *Sea (M, g) una variedad de Riemann. Se define la aplicación biyectiva, asociada a la métrica g, siguiente*

$$\begin{array}{rccc} \theta \; : & \mathrm{T}M & \longrightarrow & \mathrm{T}^*M \\ & (p,u) & \mapsto & (p, i(u)g) \end{array}$$

la cual hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}M \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\tau_M"'] & & \mathrm{T}^*M \arrow[dl, "\pi_M"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

y, por tanto, θ es una 1*-forma diferencial en M* a lo largo de τ_M *(lo cual denotaremos como $\theta \in \mathit{\Omega}^1(M, \tau_M)$), que se denomina* 1-forma de cantidad demovimiento *o* 1-forma de momento lineal *asociada a la métrica.*

La ecuación dinámica del sistema (1) se puede expresar utilizando esta forma θ como sigue:

Proposición 1 *(*Forma dual de las ecuaciones dinámicas*): Dado un sistema mecánico Newtoniano (M, g, ω), una curva $\gamma \colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ es solución de la ecuación dinámica si, y sólo si, satisface la ecuación*

$$\nabla_{\dot\gamma}(\theta \circ \dot\gamma) = \omega \circ \gamma \tag{2}$$

(*Dem.*) Si $\gamma \colon [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ es una curva en M, entonces $\theta \circ \dot\gamma \in \mathit{\Omega}^1(M, \gamma)$, y se tiene que

$$\nabla_{\dot\gamma}(\theta \circ \dot\gamma) = \nabla_{\dot\gamma}(i(\dot\gamma)g) = i(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma)g + i(\dot\gamma)\nabla_{\dot\gamma}g = i(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma)g = \theta \circ \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$$

Y si γ es una trayectoria dinámica, esto es $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \mathrm{F} \circ \gamma$, tenemos:

$$\nabla_{\dot\gamma}(\theta \circ \dot\gamma) = \theta \circ \mathrm{F} \circ \gamma = i(\mathrm{F})g \circ \gamma = \omega \circ \gamma$$

esto es, la expresión (2).

Observar que si $\theta \circ \dot\gamma \in \mathit{\Omega}^1(M, \gamma)$, entonces, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, se tiene que

$$\nabla_{\dot\gamma}(\theta \circ \dot\gamma)(X) = (\nabla_{\dot\gamma}(\theta \circ \dot\gamma))(X) + (\theta \circ \dot\gamma)(\nabla_{\dot\gamma}X)$$

■

Y de aquí se obtiene:

Teorema 1 (Conservación de la Cantidad de Movimiento)*: Si la forma de trabajo (o lo que es equivalente, el campo de fuerzas) de un sistema mecánico (M, g, ω) es nula, entonces la cantidad de movimiento es invariante ("constante") a lo largo de las trayectorias del sistema* [1]*.*

[1] En un lenguaje más preciso, el resultado es que la forma $\theta \circ \dot\gamma \in \mathit{\Omega}^1(M, \gamma)$ es paralela. No obstante se mantiene el enunciado dado por ser la forma clásica del teorema.

En $\mathbb{R}^3$, referido a una carta de coordenadas cartesianas, se tiene que $\Gamma^k_{ij} = 0$, $\forall i, j, k$, y por tanto, las componentes de $\theta \circ \dot\gamma$ son constantes.

(*Dem.*) $\omega = 0 \Leftrightarrow F = 0$, y entonces las ecuaciones de Newton son $\nabla_{\dot\gamma}(\theta \circ \dot\gamma) = 0$; de donde $\theta \circ \dot\gamma$ es constante sobre la trayectoria. ∎

Finalmente, asociada a la métrica de Riemann se tiene la siguiente función:

Definición 3 *Dada una variedad de Riemann (M, g), la función*

$$\begin{array}{cccc} T & : & \mathrm{T}M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (p,u) & \mapsto & \frac{1}{2}g(u,u) \end{array}$$

se denomina energía cinética *del sistema.*

Su expresión local es

$$T(x^i, v^j) = \frac{1}{2} g_{ij}(x) v^i v^j$$

1.1.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange

A continuación se van a transformar las ecuaciones dinámicas de un sistema mecánico Newtoniano en otro tipo de ecuaciones que, en general, son más fáciles de calcular.

En primer lugar, se necesitará el siguiente resultado auxiliar:

Lema 1 *Sea (M, g) una variedad de Riemann, $T \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}M)$ la energía cinética asociada, ∇ la conexión de Levi-Civitta de la métrica g, y $\gamma \colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ una curva diferenciable. Si $(U, \varphi = (q^i))$ es una carta local en M, y $(\tau_M^{-1}(U), q^i, v^i)$ es la carta natural en $\mathrm{T}M$; entonces se verifica que*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial v^j} \circ \dot\gamma\right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} \circ \dot\gamma = g\left(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \frac{\partial}{\partial q^j}\right) \qquad (\forall j)$$

(*Dem.*) Se compararán las expresiones locales de ambos miembros. Dado que $T = \frac{1}{2}g_{ij}v^iv^j$, se tiene que

$$\frac{\partial T}{\partial v^j} = g_{ij}v^i \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial q^j} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} v^i v^k$$

de donde, si $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^m)$,

$$\frac{\partial T}{\partial v^j} \circ \dot\gamma = (g_{ij} \circ \gamma) \circ \dot\gamma^i \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial q^j}\dot\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \circ \gamma\right)\dot\gamma^i\dot\gamma^k$$

entonces resulta que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial v^j} \circ \dot\gamma\right) = \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \circ \gamma\right)\dot\gamma^k\dot\gamma^i + (g_{ij} \circ \gamma)\ddot\gamma^i$$

y, por tanto,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial v^j} \circ \dot\gamma\right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} \circ \dot\gamma = \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \circ \gamma\right)\dot\gamma^k\dot\gamma^i + (g_{ij} \circ \gamma)\ddot\gamma^i - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \circ \gamma\right)\dot\gamma^i\dot\gamma^k$$

Por otra parte

$$g\left(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \frac{\partial}{\partial q^j}\right) = (g_{ij} \circ \gamma)\ddot\gamma^i + (g_{ij} \circ \gamma)\Gamma^i_{kl}\dot\gamma^k\dot\gamma^l$$

pero puesto que

$$[kl, j] = g_{ij}\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial q^j}\right)$$

sustituyendo en la igualdad precedente, se obtiene el resultado deseado. ∎

Y, seguidamente ya se está en condiciones de probar que:

Teorema 2 (de Lagrange)*: Sea (M,g,ω) un sistema mecánico Newtoniano, y $\gamma\colon [a,b]\subset\mathbb{R}\longrightarrow M$ una curva diferenciable que está en el dominio $U\subset M$ de la carta local $(U,\varphi=(q^i))$ de M. Entonces, la condición necesaria y suficiente para que γ sea solución de la ecuación dinámica del sistema (4) es que satisfaga las ecuaciones*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial v^j}\circ\dot\gamma\right)-\frac{\partial T}{\partial q^j}\circ\dot\gamma=(\omega\circ\gamma)\left(\frac{\partial}{\partial q^j}\right)=\omega_j\circ\gamma \qquad (j=1,\ldots,m) \tag{3}$$

las cuales se denominan ecuaciones de Euler-Lagrange (de segunda especie) *del sistema.*

(*Dem.*) Si γ es solución de las ecuaciones de Newton, esto es, $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=\mathrm{F}\circ\gamma$, entonces

$$g\left(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,\frac{\partial}{\partial q^j}\right)=g\left(\mathrm{F}\circ\gamma,\frac{\partial}{\partial q^j}\right)=(\omega\circ\gamma)\left(\frac{\partial}{\partial q^j}\right)$$

luego, de acuerdo con el lema previo, verifica el sistema de ecuaciones (3).

Recíprocamente, si γ stisface el sistema (3), entonces

$$g\left(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,\frac{\partial}{\partial q^j}\right)=(\omega\circ\gamma)\left(\frac{\partial}{\partial q^j}\right)$$

de donde $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=\mathrm{F}\circ\gamma$, ya que $i(\mathrm{F})g=\omega$; por consiguiente es solución de las ecuaciones de Newton. ∎

Comentarios:

- Para poder escribir las ecuaciones de Newton de un sistema mecánico (M,g,ω), es necesario calcular previamente los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civitta asociada a la métrica g. Sin embargo, para escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange no se necesita conocer la expresión local de la conexión. También es remarcable que el procedimiento para obtener dichas ecuaciones no depende de la carta local en cuestión, sino que basta calcular las expresiones de T y ω en dicha carta, y calcular las derivadas necesarias.
- Otra forma de intepretar las ecuaciones de Euler-Lagrange es la siguiente: sea (U,q^i) una carta local en M, y las ecuaciones de Newton del sistema, que en esa carta se expresa

  $$\ddot\gamma^i+\Gamma^i_{jk}\dot\gamma^j\dot\gamma^k=\mathrm{F}^i\circ\gamma \qquad (i,j,k=1,\ldots,m)$$

  o bien, como habitualmente se escriben

  $$\ddot q^i+\Gamma^i_{jk}\dot q^j\dot q^k=\mathrm{F}^i \qquad (i,j,k=1,\ldots,m)$$

  que es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Para transformarlo en un sistema de primer orden se introducen nuevas variables $v^i=\dot q^i$, y se obtiene el sistema

  $$\begin{aligned}\dot q^i &= v^i\\ \dot v^i &= \mathrm{F}^i-\Gamma^i_{jk}v^jv^k\end{aligned}$$

  el cual es de primer orden en la variedad $\mathrm{T}M$, y tiene por campo vectorial asociado

  $$X=v^i\frac{\partial}{\partial q^i}+(\mathrm{F}^i-\Gamma^i_{jk}v^jv^k)\frac{\partial}{\partial v^i}$$

  Dado que $X\in\mathfrak{X}(\tau_M^{-1}(U))$, por cada punto $(p,u)\in\tau_M^{-1}(U)$ pasa una única solución, con (p,u) como condición inicial. Si ahora se consideran las funciones que intervienen en las ecuaciones de Euler-Lagrange y se calcula como actúa X sobre ellas, usando las propiedades de los símbolos de Christoffel, se obtiene:

  $$X\left(\frac{\partial T}{\partial v^k}\right)=X(g_{lk}v^l)=\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^i}v^iv^l+g_{lk}(\mathrm{F}^l-\Gamma^l_{ij}v^iv^j)$$

  de donde

  $$X\left(\frac{\partial T}{\partial v^k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^k}=\frac{\partial g_{lk}}{\partial v^i}v^iv^l+g_{lk}\mathrm{F}^l-g_{lk}\Gamma^l_{ij}v^iv^j-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k}v^iv^j=g_{lk}\mathrm{F}^l$$

  De aquí se puede concluir que:

Proposición 2 *Sea (M, g, ω) un sistema mecánico Newtoniano, (U, q^i) una carta local en M, y $(\tau_M^{-1}(U), q^i, v^i)$ la correspondiente carta natural en $\mathrm{T}M$. Entonces, en $\tau_M^{-1}(U)$ existe un único campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\tau_M^{-1}(U))$ verificando:*

1. $\mathrm{L}(X)q^k = v^k$, $\forall k$.
2. $\mathrm{L}(X)\left(\dfrac{\partial T}{\partial v^k}\right) = \dfrac{\partial T}{\partial v^k} + g_{ik}\mathrm{F}^i$, $\forall k$.

Además, las curvas integrales $\sigma\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{T}M$ de X son levantamientos a $\mathrm{T}M$ de curvas $\gamma\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$, las cuales son solución de las ecuaciones de Newton del sistema.

(*Dem.*) La existencia y unicidad de X es consecuencia de que $\left(q^k, \dfrac{\partial T}{\partial v^k}\right)$ forman un sistema de coordenadas en $\mathrm{T}M$, ya que la métrica g es no degenerada. Las propiedades de X se han demostrado en la discusión precedente.

Por otra parte, las curvas integrales de X son los levantamientos a $\mathrm{T}M$ de las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange, luego de las ecuaciones de Newton. ∎

Es frecuente llamar a la variedad M *espacio de configuración* del sistema, y a la variedad $\mathrm{T}M$ *espacio de fases (de velocidades)*.

1.2 Sistemas conservativos

1.2.1 Definición. Energía Mecánica

Definición 4 *Un sistema mecánico Newtoniano (M, g, ω) es* conservativo *si su forma de trabajo es exacta; esto es, existe $V \in \mathrm{C}^\infty(M)$ tal que $\omega = -\mathrm{d}V$* [2].

En tal caso, la función V se denomina energía potencial *del sistema.*

A partir de aquí se define:

Definición 5 *Dado un sistema mecánico Newtoniano conservativo (M, g, ω), se denomina* Energía total *o* Energía mecánica *del sistema a la función*

$$\begin{array}{rccc} E & : & \mathrm{T}M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (p,u) & \mapsto & T(p,u) + (\tau_M^* V)(p,u) \end{array}$$

(Para simplificar se escribe $E = T + V$).

Como consecuencia directa de lo expuesto se tiene:

Teorema 3 (Conservación de la Energía Mecánica)*: En un sistema mecánico Newtoniano conservativo (M, g, ω), la Energía Mecánica E es invariante ("constante") a lo largo de las trayectorias del sistema.*

(*Dem.*) Si $\gamma\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ es una solución de las ecuaciones de Newton,

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \mathrm{F} \circ \gamma \quad , \quad i(\mathrm{F})g = \omega = -\mathrm{d}V \tag{4}$$

[2] El signo negativo es un convenio tradicional en Física.

entonces resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(E\circ\dot\gamma)}{\mathrm{d}t} &= \nabla_{\dot\gamma}(E\circ\dot\gamma) = \nabla_{\dot\gamma}\left(\frac{1}{2}g(\dot\gamma,\dot\gamma)+V\circ\gamma\right) \\
&= g(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,\dot\gamma)+\nabla_{\dot\gamma}(V\circ\gamma) = g(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,\dot\gamma)+\mathrm{d}V(\dot\gamma) \\
&= g(\mathrm{F},\dot\gamma)+\mathrm{d}V(\dot\gamma) = \omega(\dot\gamma)+\mathrm{d}V(\dot\gamma) = 0
\end{aligned}$$

ya que $\omega = -\mathrm{d}V$. ■

1.2.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas conservativos. Función lagrangiana

Proposición 3 *Sea (M,g,ω) un sistema mecánico Newtoniano conservativo ($\omega = -\mathrm{d}V$), y $\gamma\colon [a,b]\subset\mathbb{R} \longrightarrow M$ una curva diferenciable que está en el dominio $U\subset M$ de la carta local $(U,\varphi=(q^i))$ de M. Entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange del sistema se expresan como*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v^j}\circ\dot\gamma\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^j}\circ\dot\gamma = 0 \qquad (j=1,\ldots,m) \tag{5}$$

donde $\mathcal{L} := T - V$ es la denominada función lagrangiana *del sistema.*

Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones de Euler-Lagrange de *primera* especie.

(*Dem.*) En efecto, se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial v^j}\circ\dot\gamma\right)-\frac{\partial T}{\partial q^j}\circ\dot\gamma = (-\mathrm{d}V\circ\gamma)\left(\frac{\partial}{\partial q^j}\right) = -\frac{\partial\tau_M^*V}{\partial q^j}\circ\gamma$$

y, teniendo en cuenta que $\dfrac{\partial\tau_M^*V}{\partial v^j}=0$, $(\forall j)$, de aquí se puede escribir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial v^j}\circ\dot\gamma\right)-\frac{\partial(T-V)}{\partial q^j}\circ\dot\gamma = 0$$

■

Comentario:

Para el caso de sistemas conservativos, es inmediato comprobar que el campo vectorial $X\in\mathfrak{X}(\tau_M^{-1}(U))$ de la proposición 2 satisface la condición

$$\mathrm{L}(X)\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v^k}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v^k} \quad , \quad (k=1,\ldots,m)$$

(en vez de la condición 2 enunciada en dicha proposición).

1.3 Sistemas con fuerzas dependientes de las velocidades

En Mecánica es frecuente que el campo de fuerzas (o la forma de trabajo) no sean función sólo de la posición, sino también de la velocidad. Geométricamente esto quiere decir que $\omega\in\mathit{\Omega}^1(M,\tau_M)$ y $\mathrm{F}\in\mathfrak{X}(M,\tau_M)$. Entonces, los únicos cambios que hay que hacer, en relación a lo expuesto en las anteriores secciones, son los siguientes:

1. Las ecuaciones de Newton se escriben, ahora:

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \mathrm{F}\circ\dot\gamma$$

o, en forma dual,

$$\nabla_{\dot\gamma}(\theta\circ\dot\gamma) = \omega\circ\dot\gamma$$

2. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial v^j}\circ\dot\gamma\right)-\frac{\partial T}{\partial q^j}\circ\dot\gamma=(g_{ij}\mathrm{F}^i)\circ\dot\gamma=(\omega_j\circ\dot\gamma)\qquad(j=1,\ldots,m)$$

   Obsérvese que, en este caso, no hay función lagrangiana (al menos, en el sentido habitual), ya que ω no puede ser la diferencial de una función definida en M.

Como puede apreciarse, los únicos cambios introducidos han consistido en sustituir γ por $\dot\gamma$, al componer con ω o con F, para tener en cuenta su dominio de definición.

1.4 Sistemas acoplados (en interacción)

1.4.1 Definiciones y equivalencias

Sean (M_1,g_1,ω_1), (M_2,g_2,ω_2) sistemas mecánicos Newtonianos y $\mathrm{F}_1\in\mathfrak{X}(M_1)$, $\mathrm{F}_2\in\mathfrak{X}(M_2)$ los correspondientes campos de fuerzas asociados. Las ecuaciones dinámicas de ambos sistemas son

$$\nabla^1_{\dot\gamma_1}\dot\gamma_1=\mathrm{F}_1\circ\gamma_1\quad;\quad\nabla^2_{\dot\gamma_2}\dot\gamma_2=\mathrm{F}_2\circ\gamma_2\tag{6}$$

(con $\gamma_1\colon I\subset\mathbb{R}\longrightarrow M_1$, $\gamma_2\colon I\subset\mathbb{R}\longrightarrow M_2$), que juntas forman un sistema de ecuaciones diferenciales desacoplado.

Considérese el sistema (M,g,ω), donde:

- $M=M_1\times M_2$; con $\pi_1\colon M\longrightarrow M_1$, $\pi_2\colon M\longrightarrow M_2$.
- $g=g_1\oplus g_2$.
- $\omega=\pi_1^*\omega_1+\pi_2^*\omega_2$.

y en el cual se observa que $\nabla=\nabla^1\oplus\nabla^2$ es la conexión de Levi-Civitta de la métrica g, y está definida por: si $\gamma\colon I\subset\mathbb{R}\longrightarrow M$, es $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$, entonces

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=\nabla^1_{\dot\gamma_1}\dot\gamma_1+\nabla^2_{\dot\gamma_2}\dot\gamma_2$$

Además, de la expresión de ω se obtiene que el campo de fuerza $\mathrm{F}\in\mathfrak{X}(M)$ asociado está dado por

$$\mathrm{F}(p)=((p_1,p_2),\mathrm{F}_1(p_1),\mathrm{F}_2(p_2))$$

(siendo $p\equiv(p_1,p_2)\in M$). Entonces la ecuación dinámica del sistema es $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=\mathrm{F}\circ\gamma$, que equivale al sistema desacoplado (6). Físicamente esta situación modelizaría dos *sistemas mecánicos en presencia* pero *sin interacción*. De aquí que:

Definición 6 *N sistemas Newtonianos $(M_\mu,g_\mu,\mathrm{F}_\mu)$ $(\mu=1,\ldots,N)$ se dice que están* acoplados *(o en* interacción*) si $\mathrm{F}_\mu\in\mathfrak{X}(M_\mu,\pi_\mu)$, esto es, se tiene el siguiente diagrama (conmutativo)*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{T}M_\mu \arrow[d, "\tau_\mu"] \\ \prod_{\mu=1}^N M_\mu \arrow[ur, "\mathrm{F}_\mu"] \arrow[r, "\pi_\mu"] & M_\mu \end{tikzcd}$$

En tal caso, si $N=2$, se tiene un sistema de ecuaciones como (6) pero que, en esta ocasión, está acoplado, es decir tenemos:

$$\nabla^1_{\dot\gamma_1}\dot\gamma_1=\mathrm{F}_1\circ\gamma=\mathrm{F}_1\circ(\gamma_1,\gamma_2)\quad;\quad\nabla^2_{\dot\gamma_2}\dot\gamma_2=\mathrm{F}_2\circ\gamma=\mathrm{F}_1\circ(\gamma_1,\gamma_2)$$

Se pretende poder describir este sistema como unúnico sistema Newtoniano. Para ello se necesita el siguiente:

Lema 2 *Sean N_1, N_2 variedades diferenciales, $N = N_1 \times N_2$ con las proyecciones naturales $\pi_i \colon N \longrightarrow N_i$ ($i = 1, 2$). Entonces*

1. *$\mathfrak{X}(N)$ es canónicamente isomorfo (como $\mathrm{C}^\infty(N)$-módulo) a $\mathfrak{X}(N_1, \pi_1) \times \mathfrak{X}(N_2, \pi_2)$.*
2. *$\Omega^1(N)$ es canónicamente isomorfo (como $\mathrm{C}^\infty(N)$-módulo) a $\Omega^1(N_1, \pi_1) \times \Omega^1(N_2, \pi_2)$.*

(*Dem.*) Recuérdese que, si $p \equiv (p_1, p_2) \in N$, se tiene un isomorfismo

$$\begin{array}{rcccc} \alpha_p & : & \mathrm{T}_p N & \longrightarrow & \mathrm{T}_{p_1} N_1 \times \mathrm{T}_{p_2} N_2 \\ & & u & \mapsto & (\mathrm{T}_p \pi_1(u), \mathrm{T}_p \pi_2(u)) \end{array}$$

De ahí se puede construir la secuencia

$$\mathfrak{X}(N) \xrightarrow{\phi} \mathfrak{X}(N_1, \pi_1) \times \mathfrak{X}(N_2, \pi_2) \xrightarrow{\psi} \mathfrak{X}(N)$$

donde las aplicaciones se definen como

$$\begin{array}{rcl} \phi(X)(p) & := & \alpha_p(X(p)) \\ \psi(X_1, X_2)(p) & := & \alpha_p^{-1}(X_1(p), X_2(p)) \end{array}$$

y si $\rho_i \colon \mathfrak{X}(N_1, \pi_1) \times \mathfrak{X}(N_2, \pi_2) \longrightarrow \mathfrak{X}(N_i, \pi_i)$, ($i = 1, 2$), son las proyecciones naturales, se tiene que:

1. ϕ está bien definida y $\phi(X)$ es diferenciable:
   Basta ver que $\rho_i(\phi(X))$ es diferenciable. Para ello sea $f \in \mathrm{C}^\infty(N_i)$, se tiene que
   $$((\rho_i(\phi(X)))f)(p) = \rho_i(\alpha_p(X(p)))f = \mathrm{T}_p \pi_i(X(p))f = X(p)(f \circ \pi_i) = (X)(f) \circ \pi_i))(p)$$
   que depende diferenciablemente de $p \in N$.
2. ϕ es inyectiva, como consecuencia de que las aplicaciones α_p son isomorfismos.
3. ϕ es un morfismo de $\mathrm{C}^\infty(N)$-módulos, obviamente.
4. $\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_{\mathfrak{X}(N)}$:
   Si $X \in \mathfrak{X}(N)$ y $p \in N$, resulta que
   $$((\psi \circ \phi)(X))(p) = \psi(\phi(X))(p) = \alpha_p^{-1}(\phi(X)(p)) = \alpha_p^{-1}(\alpha_p(X(p))) = X(p)$$

Y el resultado es directo.

El enunciado (2) es consecuencia directa del (1). ■

De aquí se tiene, como consecuencia inmediata que:

Teorema 4 *Dos sistemas dinámicos Newtonianos en interacción, $(M_\mu, g_\mu, \mathrm{F}_\mu)$ ($\mu = 1, 2$), son "equivalentes" a un sólo sistema mecánico Newtoniano (M, g, F), donde*

- *$M = M_1 \times M_2$; con $\pi_1 \colon M \longrightarrow M_1$, $\pi_2 \colon M \longrightarrow M_2$.*
- *$g = g_1 \oplus g_2$.*
- *$\omega = (\omega_1, \omega_2)$ y $\mathrm{F} = (\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2)$.*

(donde se han identificado $\mathfrak{X}(N)$ con $\mathfrak{X}(N_1, \pi_1) \times \mathfrak{X}(N_2, \pi_2)$, y $\Omega^1(M)$ con $\Omega^1(M_1, \pi_1) \times \Omega^1(M_2, \pi_2)$, de acuerdo con el lema precedente) [3].

[3] El sentido de esta equivalencia es el siguiente: si $\gamma \colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ es solución de la ecuación dinámica de (M, g, F), y $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, entonces $\gamma_\mu \colon \subset \mathbb{R} \longrightarrow M_\mu$, ($\mu = 1, 2$), son solución de las ecuaciones dinámicas acopladas de los sistemas $(M_\mu, g_\mu, \mathrm{F}_\mu)$; y recíprocamente.

(*Dem.*) La métrica $g = g_1 \oplus g_2$ es Riemanniana en M y su conexión de Levi-Civitta ∇ es $\nabla_1 \oplus \nabla_2$; luego la ecuación dinámica asociada a este sistema Newtoniano descompone en las dos componentes correspondientes a M_1 y M_2; de donde el resultado.

Observar que

$$i(\mathrm{F})g = i(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2)(g_1 \oplus g_2) = i(\mathrm{F}_1)g_1 + i(\mathrm{F}_2)g_2 = \omega_1 + \omega_2$$

y que la ecuación dinámica $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \mathrm{F} \circ \gamma$ descompone en las ecuaciones:

$$\nabla^1_{\dot\gamma_1}\dot\gamma_1 = \mathrm{F}_1 \circ \gamma = \mathrm{F}_1 \circ (\gamma_1, \gamma_2) \quad ; \quad \nabla^2_{\dot\gamma_2}\dot\gamma_2 = \mathrm{F}_2 \circ \gamma = \mathrm{F}_1 \circ (\gamma_1, \gamma_2)$$

■

Comentario:

Es frecuente que, en una primera aproximación, se consideren los sistemas sin interacción (M_1, g_1, F_1), (M_2, g_2, F_2), y después se introduzca la interacción $\mathrm{F}^{int} = (\mathrm{F}_1^{int}, \mathrm{F}_2^{int})$, con lo que se tiene el sistema $(M_1 \times M_2, g_1 \oplus g_2, \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_1^{int}, \mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_2^{int})$.

Corolario 1 *Un conjunto de N sistemas mecánicos acoplados $(M_\mu, g_\mu, \mathrm{F}_\mu)$ $(\mu = 1, \ldots N)$, es "equivalente" a un sólo sistema mecánico Newtoniano (M, g, F), donde*

- $M = M_1 \times \ldots \times M_N$*; con* $\pi_\mu \colon M \longrightarrow M_\mu$.
- $g = g_1 \oplus \ldots g_N$.
- $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$ *y* $\mathrm{F} = (\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_N)$.

(donde se han identificado $\mathfrak{X}(N)$ con $\displaystyle\prod_{\mu=1}^N \mathfrak{X}(N_\mu, \pi_\mu)$, y $\Omega^1(M)$ con $\displaystyle\prod_{\mu=1}^N \Omega^1(N_\mu, \pi_\mu)$ de acuerdo con el lema anterior).

(M, g, F) *se denomina* sistema dinámico Newtoniano con interacción.

1.4.2 Expresiones en coordenadas

Se trata de expresar la ecuación dinámica en coordenadas. Sea entonces $\gamma \equiv (\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ (donde γ_μ designa la trayectoria en la variedad M_μ), Dicha ecuación se escribirá

$$\nabla^\mu_{\dot\gamma_\mu}\dot\gamma_\mu = \mathrm{F}_\mu \circ \gamma$$

Para obtener la expresión local de ∇, sean (U_μ, q^i_μ) cartas locales en M_μ. Se tiene que (U, q^j_μ), con $U = U_1 \times \ldots \times U_N$ es una carta local en M, y si $\{(\Gamma_\mu)^i_{jk}\}$ son los símbolos de Christoffel de ∇_μ, entonces se puede escribir

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial q^j_\mu}} \frac{\partial}{\partial q^k_\mu} &= (\Gamma_\mu)^i_{jk} \frac{\partial}{\partial q^i_\mu} \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial q^j_\mu}} \frac{\partial}{\partial q^k_\nu} &= 0 \qquad (\mu \neq \nu) \end{aligned}$$

ya que la conexión ∇ es de Levi-Civitta. De ahí

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \sum_{\mu=1}^N \left(\ddot\gamma^j_\mu \frac{\partial}{\partial q^j_\mu} + (\Gamma_\mu)^i_{jk}\dot\gamma^j_\mu\dot\gamma^k_\mu \frac{\partial}{\partial q^i_\mu} \right) = \mathrm{F} \circ \gamma$$

de donde, para cada $\mu = 1, \ldots, N$,

$$\ddot\gamma^i_\mu \frac{\partial}{\partial q^i_\mu} + (\Gamma_\mu)^i_{jk}\dot\gamma^j_\mu\dot\gamma^k_\mu \frac{\partial}{\partial q^i_\mu} = \mathrm{F}^i_\mu \circ \gamma$$

y, por tanto, si dim $M_\mu = m_\mu$, para cada $\mu = 1, \ldots, N$ y para cada $i = 1, \ldots, m_\mu$,

$$\ddot{\gamma}^i_\mu + (\Gamma_\mu)^i_{jk}\dot{\gamma}^j_\mu\dot{\gamma}^k_\mu = \mathrm{F}^i_\mu \circ \gamma$$

Para escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange del sistema, se construye la carta asociada $(\tau_\mu^{-1}(U), q^j_\mu, v^j_\mu)$ en $\mathrm{T}M$ y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial v^j_\mu} \circ \dot{\gamma}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^j_\mu} \circ \dot{\gamma} = (g_\mu)_{jk}\mathrm{F}^k_\mu \qquad (\forall \mu, j)$$

donde la función energía cinética es $T = \sum_{\mu=1}^N T_\mu$, ya que $g = g_1 \oplus \ldots \oplus g_N$. De ahí, teniendo en cuenta que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_\nu}{\partial v^j_\mu}\right) = 0 \quad , \quad \frac{\partial T_\nu}{\partial q^j_\mu} = 0 \quad ; \quad \text{si } \mu \neq \nu$$

se puede escribir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_\mu}{\partial v^j_\mu} \circ \dot{\gamma}\right) - \frac{\partial T_\mu}{\partial q^j_\mu} \circ \dot{\gamma} = (g_\mu)_{jk}\mathrm{F}^k_\mu \qquad (\forall \mu, j)$$

Si, además, el sistema es conservativo, $\omega = -\mathrm{d}V$ (con $V \in \mathrm{C}^\infty(M)$); esto es,

$$\omega = -\frac{\partial V}{\partial q^j_\mu}\mathrm{d}q^j_\mu$$

e introduciendo la función lagrangiana del sistema $\mathcal{L} = T - \tau^*V$, cuya expresión local es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^N (g_\mu)_{jk}v^j_\mu v^k_\mu - V = \sum_{\mu=1}^N T_\mu - V$$

se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^j_\mu} \circ \dot{\gamma}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j_\mu} \circ \dot{\gamma} = 0 \qquad (\forall \mu, j)$$

Finalmente, si las fuerzas dependieran de las velocidades, sería lo mismo poniendo $\mathrm{F} \circ \dot{\gamma}$ (en vez de $\mathrm{F} \circ \gamma$) en todas las ecuaciones. En este caso $\mathrm{F}_\mu \in \mathfrak{X}(M_\mu, \pi_\mu \circ \tau_\mu)$, siendo $\tau_\mu \colon \mathrm{T}M_\mu \longrightarrow M_\mu$ la proyección natural.

1.5 Sistemas con ligaduras holónomas

1.5.1 Planteo del problema. Principio de D'Alembert

Sea (M, g, ω) un sistema mecánico Newtoniano y $\mathrm{F} \in \mathfrak{X}(M)$ el campo de fuerzas asociado. Sea S una subvariedad de M (que recibe el nombre de *subvariedad de ligaduras holónomas*) y $j \colon S \hookrightarrow M$ la inyección natural. El problema que se plantea consiste en la descripción de la dinámica cuando el sistema está obligado a evolucionar sobre la subvariedad S. Para ello, en primer lugar, es preciso aplicar un nuevo campo de fuerzas R, denominado *fuerza de ligadura*, que obliga al sistema a permanecer en S. En general, dicha fuerza depende, no sólo de la posición, sino también de la velocidad; luego $\mathrm{R} \in \mathfrak{X}(M, \tau_M)$ y, además, es desconocida en principio (por tanto es una nueva incógnita).

Se tendrá, por consiguiente, una ecuación dinámica referida a curvas $\gamma \colon [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow S$, que es

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \mathrm{F} \circ \gamma + \mathrm{R} \circ \dot{\gamma} \tag{7}$$

Para resolver este problema, se establece la siguiente:

Hipótesis 1 (Principio de D'Alembert*): La fuerza de ligadura* R *es ortogonal a la subvariedad* S*.*

(Es decir, $\forall p \in S$ *y* $\forall u, v \in \mathrm{T}_pS$*, entonces* $g(u, \mathrm{R}(p, v)) = 0$*).*

La cuestión ahora es resolver el problema y tratar de obtener información sobre la fuerza de ligadura. Para ello, sea $g_S := j^*g$. Es obvio que (S, g_S) es una variedad de Riemann. Sea ∇^S la conexión de Levi-Civitta asociada a la métrica g_S. Por otra parte, se tiene la siguiente descomposición natural

$$\mathrm{T}_pM = \mathrm{T}_pS \oplus (\mathrm{T}_pS)^\perp \qquad (\forall p \in S \subset M)$$

que define las proyecciones

$$\pi_S(p) =: \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_pS \quad , \quad \pi_S^\perp(p) =: \mathrm{T}_pM \to (\mathrm{T}_pS)^\perp$$

las cuales se escribirán en la forma

$$\pi_S =: \mathrm{T}M|_S \to \mathrm{T}S \quad , \quad \pi_S^\perp =: \mathrm{T}M|_S \to \mathrm{T}S^\perp$$

Entonces resulta que el princip de D'Alembert se reduce a $\pi_S \circ \mathrm{R} = 0$. Tenemos además:

Proposición 4 $\nabla^S = \pi_S \circ \nabla$.

(*Dem.*) Es inmediato comprobar que $\pi_S \circ \nabla$, restringida a campos tangentes a S, es una conexión en S y que es simétrica. Por otra parte, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S)$ se tiene que

$$(\pi_S \circ \nabla_Z)g(X, Y) = g((\pi_S \circ \nabla_Z)X, Y) + g(X, (\pi_S \circ \nabla_Z)Y)$$

luego $\pi_S \circ \nabla$ es la conexión de Levi-Civitta de g_S. ■

Si ahora se toma la ecuación dinámica (7) y se descompone en las partes tangente y ortogonal a S, se obtienen

$$\begin{array}{rclcl} \pi_S(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma) & = & \pi_S \circ \mathrm{F} \circ \gamma + \pi_S \circ \mathrm{R} \circ \dot\gamma & = & \pi_S \circ \mathrm{F} \circ \gamma \\ \pi_S^\perp(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma) & = & \pi_S^\perp \circ \mathrm{F} \circ \gamma + \pi_S^\perp \circ \mathrm{R} \circ \dot\gamma & = & \pi_S^\perp \circ \mathrm{F} \circ \gamma + \mathrm{R} \circ \dot\gamma \end{array} \tag{8}$$

y, llamando $\mathrm{F}^S := \pi_S \circ \mathrm{F} \in \mathfrak{X}(S)$ (la proyección de F sobre S), la primera ecuación queda

$$\nabla^S_{\dot\gamma}\dot\gamma = \mathrm{F}^S \circ \gamma \tag{9}$$

que es la ecuación dinámica del sistema mecánico Newtoniano (S, g_S, ω_S), donde $\omega_S = i(\mathrm{F}^S)g_S$.

Las soluciones de la ecuación (9) son curvas $\gamma\colon [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow S$, que sustituidas en la segunda de las ecuaciones (8), permite calcular la fuerza de ligadura R para esa trayectoria, obteniéndose

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma - \nabla^S_{\dot\gamma}\dot\gamma = \mathrm{F} \circ \gamma - \mathrm{F}^S \circ \gamma + \mathrm{R} \circ \dot\gamma$$

y de aquí $\mathrm{R} \circ \dot\gamma \in \mathfrak{X}(M, \dot\gamma)$. Obsérvese que la fuerza de ligadura sólo se tiene calculada sobre cada una de las trayectorias dinámicas del sistema.

Por otra parte tenemos:

Proposición 5 $\omega_S = j^*\omega$.

(*Dem.*) Si $p \in S$ y $u \in \mathrm{T}_pS$ se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \omega_S(u) & = & (i(\mathrm{F}^S)g_S)(u) = g_S(\mathrm{F}^S, u) = g(\mathrm{F}^S, u) = g(\mathrm{F}, u) \\ (j^*\omega)(u) & = & (j^*\, i(\mathrm{F})g)(u) = g(\mathrm{F}, u) \end{array}$$

y de ahí el resultado. ■

Así pues, el sistema dinámico que describe el movimiento de (M, g, ω) con ligadura S, no es otro que $(S, j^*g, j^*\omega)$.

Si, tal como se ha dicho, la condición de estar obligado a moverse sobre la subvariedad de ligaduras S queda modelada por una fuerza $\mathrm{R} \in \mathfrak{X}(M, \tau_M)$, y el *Principio de d'Alembert* expresa que R es ortogonal a S, se puede enunciar que:

Proposición 6 (Principio de D'Alembert dual*): Sea $\rho = i(\mathrm{R})g$. Entonces $j^*\rho = 0$.*

(*Dem.*) Sea $p \in S$ y $u, v \in \mathrm{T}_pS$, entonces $(j^*\rho_{(p,v)})(u) = g_S(\mathrm{R}(p,v), u)) = 0$. ■

Considérese, ahora, la forma de cantidad de movimiento del sistema ligado, $\theta_S \colon \mathrm{T}S \longrightarrow \mathrm{T}^*S$. La ecuación del movimiento será, por tanto,

$$\nabla^S_{\dot\gamma}(\theta_S \circ \dot\gamma) = \omega_S \circ \gamma$$

y, ya que $\omega_S = j^*\omega$, resulta

$$\nabla^S_{\dot\gamma}(\theta_S \circ \dot\gamma) = j^*\nabla_{\dot\gamma}(\theta \circ \dot\gamma)$$

1.5.2 Casos particulares

Sistemas con una ligadura:

Sea $S = \{p \in M \ ; \ \varphi(p) = 0\}$, con $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(M)$ y supongamos que $\mathrm{d}\varphi(p) \neq 0$, para todo $p \in S$. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $i(X)g = \mathrm{d}\varphi$, entonces X es un campo vectorial ortogonal a S. De ahí

$$\pi^\perp_S(\mathrm{F}) = \frac{g(\mathrm{F}, X)}{g(X,X)}X = \frac{\mathrm{d}\varphi(\mathrm{F})}{\|\mathrm{d}\varphi\|^2}X$$

y se obtiene que

$$\mathrm{F}^S = \pi_S(\mathrm{F}) = \mathrm{F} - \frac{\mathrm{d}\varphi(\mathrm{F})}{\|\mathrm{d}\varphi\|^2}X$$

por consiguiente

$$\omega_S = \omega - \frac{\mathrm{d}\varphi(\mathrm{F})}{\|\mathrm{d}\varphi\|^2}\mathrm{d}\varphi$$

lo cual permite hallar las trayectorias dinámicas como solución de la ecuación

$$\nabla^S_{\dot\gamma}\dot\gamma = \mathrm{F} \circ \gamma - \frac{\mathrm{d}\varphi(\mathrm{F})}{\|\mathrm{d}\varphi\|^2}X$$

y, por tanto, la fuerza de ligadura a lo largo de la trayectoria vendrá determinada por la ecuación

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma - \nabla^S_{\dot\gamma}\dot\gamma = \frac{\mathrm{d}\varphi(\mathrm{F})}{\|\mathrm{d}\varphi\|^2} \circ \gamma - \mathrm{R} \circ \dot\gamma$$

Sistemas con más de una ligadura:

Sea ahora

$$S = \{p \in M \ ; \ \varphi_1(p) = 0, \ldots, \varphi_h(p) = 0\}$$

con $\varphi_1 \ldots, \varphi_h \in \mathrm{C}^\infty(M)$, y tales que $\mathrm{d}\varphi_1, \ldots \mathrm{d}\varphi_h$ son independientes en los puntos de S. Sean $Z_1, \ldots, Z_{m-h} \in \mathfrak{X}(M)$ tales que, $\forall i, j$, se tiene que

1. $i(Z_i)\mathrm{d}\varphi_j = 0$.
2. $g(Z_i, Z_j) = 0$; $i \neq j$.

(Para obtener estos campos Z_i, basta partir de los campos vectoriales $X_1, \ldots, X_{m-h} \in \mathfrak{X}(M)$ que verifican la primera condición y ortogonalizar por el *método de Gramm-Schmidt*). Entonces se tiene que

$$\pi_S(\mathrm{F}) = \sum_{i=1}^m \frac{g(\mathrm{F}, Z_i)}{g(Z_i, Z_i)}Z_i$$

y, a partir de aquí, siguiendo la misma pauta que en el caso anterior, se obtiene la ecuación dinámica y, para cada trayectoria, la fuerza de ligadura a lo largo de ella.

1.5.3 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Se ha visto que la dinámica de un sistema mecánico Newtoniano (M, g, ω) sometido a moverse sobre la subvariedad $j\colon S \hookrightarrow M$ es la del sistema dinámico Newtoniano (S, g_S, ω_S). Por consiguiente, para escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange basta con tomar una carta local (U, q^i) en S y la carta $(\tau_M^{-1}(U), q^i, v^i)$ en $\mathrm{T}S$. Entonces se tendrá

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_S}{\partial v^k}\circ\dot\gamma\right) - \frac{\partial T_S}{\partial q^k}\circ\dot\gamma = (g_S)_{ik}(\mathrm{F}^{\mathrm{S}})^i \qquad (\forall k) \tag{10}$$

donde T_S es la *energía cinética* del sistema, que se define como la función

$$\begin{array}{cccc} T_S & : & \mathrm{T}S & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (p,u) & \mapsto & \frac{1}{2}g_S(u,u) \end{array}$$

Se tiene que:

Proposición 7 $T_S = (\mathrm{T}j)^*T$.

(*Dem.*) Si $p \in S$ y $u \in \mathrm{T}_pS$, entonces

$$T_S(p,u) = \frac{1}{2}(g_S)_{ik}(p)u^iu^k = \frac{1}{2}g_{ik}(p)u^iu^k$$

y de ahí el resultado. ∎

De este modo, la ecuación (10) es

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial(\mathrm{T}j)^*T}{\partial v^k}\circ\dot\gamma\right) - \frac{\partial(\mathrm{T}j)^*T}{\partial q^k}\circ\dot\gamma = (\omega_S)_k\circ\gamma = (j^*\omega)_k\circ\gamma \qquad (\forall k)$$

Si el sistema dinámico fuera conservativo; esto es, $\omega = -\mathrm{d}V$, entonces

$$\omega_S = j^*\omega = -j^*\mathrm{d}V = -\mathrm{d}j^*V$$

y las ecuaciones anteriores quedan escritas en la forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial(\mathrm{T}j)^*T}{\partial v^j}\circ\dot\gamma\right) - \frac{\partial(\mathrm{T}j)^*T}{\partial q^j}\circ\dot\gamma = -\frac{\partial j^*V}{\partial q^k}\circ\gamma \qquad (\forall i)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_S}{\partial v^j}\circ\dot\gamma\right) - \frac{\partial\mathcal{L}_S}{\partial q^j}\circ\dot\gamma = 0 \qquad (\forall i)$$

donde $\mathcal{L}_S := (\mathrm{T}j)^*\mathcal{L}$. Obsérvese que la fuerza de ligadura no interviene en estas ecuaciones.

Si (W, x^i) es una carta local en M y (U, q^i) lo es en S, y la inyección $j\colon W \hookrightarrow U$ está dada localmente por $x^i = f^i(q)$, entonces $\dot x^i = \dfrac{\partial f^i}{\partial q^j}\dot q^j$ y a partir de ahí se concluye que basta con conocer $\mathcal{L}$ para el sistema libre, sustituir $x^i, \dot x^i$ por las expresiones precedentes y, aplicando las derivaciones adecuadas, obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange.

1.6 Ejemplos de sistemas dinámicos

En todos los ejemplos que siguen, la cuestión radica en identificar los elementos que definen el sistema dinámico; esto es, la *variedad de configuración*, la *métrica de Riemann* y el *campo de fuerza* o la *forma de trabajo*.

1.6.1 Partícula en $\mathbb{R}^3$ (no sometida a ligaduras)

Considérese una partícula de masa m que se mueve en un abierto $M \subset \mathbb{R}^3$, sometida a una fuerza dada por un campo vectorial $\mathrm{F} \in \mathfrak{X}(M)$.

La *métrica geométrica* g es la de $\mathbb{R}^3$. Sea, no obstante, la métrica (de Riemann) $\tilde{g} := \mathrm{m}g$. Debe observarse que las conexiones de Levi-Civitta ∇ y $\tilde{\nabla}$ correspondientes a g y $\tilde{g}$ son la misma (basta calcular sus símbolos de Christoffel en cualquier carta, o recordar el cálculo de $\nabla_X Y$ para la conexión de Levi-Civitta). Sea $\tilde{\mathrm{F}} := \dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \in \mathfrak{X}(M)$, y considérese el sistema mecánico Newtoniano $(M, \tilde{g}, \tilde{\mathrm{F}})$. Su ecuación de Newton es

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \tilde{\mathrm{F}} \circ \gamma = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \circ \gamma$$

la cual se puede expresar como

$$\mathrm{m}\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \mathrm{F} \circ \gamma$$

como se recuerda de la Mecánica.

Nótese que la forma de trabajo es

$$\omega = i(\tilde{\mathrm{F}})\tilde{g} = i(\mathrm{F})g$$

y la forma de cantidad de movimiento

$$\tilde{\theta} \circ \dot{\gamma} = i(\dot{\gamma})\tilde{g}$$

cuya expresión local es

$$\tilde{\theta} \circ \dot{\gamma} = \mathrm{m}g_{ij}\dot{\gamma}^i \mathrm{d}q^j \circ \gamma$$

1.6.2 Partícula en una superficie de $\mathbb{R}^3$

Considérese una partícula de masa m en un abierto $M \subset \mathbb{R}^3$. Tal como se ha visto en el apartado anterior, el sistema mecánico Newtoniano que la describe es $(M, \tilde{g}, \tilde{\mathrm{F}})$. Si ahora $j \colon S \hookrightarrow M$ es una superficie y la partícula está obligada a permanecer en ella, el sistema newtoniano pasa a ser $(S, \tilde{g}_S, \tilde{\mathrm{F}}^S)$, donde $\tilde{g}_S = j^*\tilde{g}$ y $\tilde{\mathrm{F}}^S = \pi_S \circ \tilde{\mathrm{F}}$. De aquí que la ecuación dinámica sea, por tanto,

$$\nabla^S_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \tilde{\mathrm{F}}^S \circ \gamma$$

y, si se conoce una solución γ, la fuerza de ligadura sobre γ está dada por la ecuación

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} - \nabla^S_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \tilde{\mathrm{F}} \circ \gamma - \tilde{\mathrm{F}}^S \circ \gamma + \tilde{\mathrm{R}} \circ \dot{\gamma}$$

de la que se obtiene $\tilde{\mathrm{R}} \circ \dot{\gamma}$. Recordar que $\mathrm{R} = \mathrm{m}\tilde{\mathrm{R}}$.

Para hacer la formulación dual se tiene la forma de trabajo

$$\tilde{\omega} = i(\mathrm{F})g = i(\tilde{\mathrm{F}})\tilde{g}$$

y de aquí $\tilde{\omega}_S = j^*\tilde{\omega}$, luego se tiene que

$$\nabla^S_{\dot{\gamma}}(\tilde{\theta}_S \circ \dot{\gamma}) = \tilde{\omega}_S \circ \gamma$$

siendo $\tilde{\theta}_S \circ \dot{\gamma} = i(\dot{\gamma})\tilde{g}_S$, con $\tilde{\theta}_S = (\mathrm{T}j)^*\tilde{\theta}$.

1.6.3 Sistema de partículas en $\mathbb{R}^3$

Consideremos ahora un sistema de N partículas, denotadas $P_1, \ldots, P_N$, de masas $\mathrm{m}_1, \ldots, \mathrm{m}_N$. La partícula P_μ se mueve en M_μ, abierto de $\mathbb{R}^3$, que se supone dotado de la métrica g_μ y con la métrica dinámica asociada $\tilde{g}_\mu := \mathrm{m}_\mu g_\mu$.

Si la fuerza que actúa sobre cada partícula es $\mathrm{F}_\mu \in \mathfrak{X}(M_\mu)$, entonces se tienen N sistemas mecánicos desacoplados, cuyas ecuaciones dinámicas hay que resolver por separado.

Pero si las fuerzas que actúan sobre el sistema se modelizan como una familia de fuerzas $\mathrm{F}_\mu \in \mathfrak{X}(M_\mu, \pi_\mu)$, con $\pi_\mu \colon \prod_{\nu=1}^N M_\nu \longrightarrow M_\mu$, (esto es, la fuerza que actúa sobre P_μ depende de las posiciones de todas las demás partículas), entonces las N partículas están en interacción y, según se vio en el apartado 1.4.1, los N sistemas $(M_\mu, \tilde{g}_\mu, \tilde{\mathrm{F}}_\mu)$ son equivalentes a un sólo sistema mecánico Newtoniano $(M, \tilde{g}, \tilde{\mathrm{F}})$ con

- $M = \displaystyle\prod_{\mu=1}^N M_\mu$.
- $\tilde{g} = \oplus_{\mu=1}^N \tilde{g}_\mu$.
- $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$ y $\tilde{\mathrm{F}} = (\tilde{\mathrm{F}}_1, \dots, \tilde{\mathrm{F}}_N)$.

y las ecuaciones dinámicas son las del caso general descrito en ese apartado.

1.6.4 Sistema de partículas en una subvariedad

En este caso, se tiene un sistema de N partículas $P_1, \dots, P_N$, de masas $\mathrm{m}_1, \dots, \mathrm{m}_N$, que se mueven respectivamente en las variedades $M_1, \dots, M_N$ (abiertos de $\mathbb{R}^3$, cada uno dotado de la correspondiente métrica g_μ), Si F es el campo de fuerza que actúa, el sistema está modelizado como sistema Newtoniano por $(M, \tilde{g}, \tilde{\mathrm{F}})$, tal como se ha descrito en el ejemplo anterior (tanto si las partículas están en interacción, como si no lo están).

Si la dinámica del sistema está restringida a una subvariedad $j \colon S \hookrightarrow M$, es porque hay alguna fuerza de ligadura R, y la ecuación dinámica es

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \tilde{\mathrm{F}} \circ \gamma + \tilde{\mathrm{R}} \circ \dot\gamma$$

(para curvas $\gamma \colon [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow S$), donde $\tilde{\mathrm{R}} = (\tilde{\mathrm{R}}_1, \dots, \tilde{\mathrm{R}}_N)$, $\mathrm{R}_\mu = \mathrm{m}_\mu \tilde{\mathrm{R}}_\mu$, $\mu = 1, \dots, N$.

Para resolver esta ecuación asumiendo el *principio de D'Alembert* ($\tilde{\mathrm{R}}$ *es* $\tilde{g}$*-ortogonal a* S), hay que proyectar sobre S y sobre su ortogonal, tal como se indicó en el estudio general de la sección 1.5.

1.7 Sistemas con ligaduras no holónomas

1.7.1 Planteo del problema. Principio de D'Alembert no holónomo

Sea (M, g, ω) un sistema mecánico Newtoniano y $\mathrm{F} \in \mathfrak{X}(M)$ el campo de fuerzas asociado. Sea C una subvariedad de $\mathrm{T}M$, tal que $\tau_M(C) = M$ (que recibe el nombre de *subvariedad de ligaduras no holónomas*), y $j_C \colon C \hookrightarrow \mathrm{T}M$ la inyección natural. El problema que se plantea consiste en la descripción de la dinámica cuando el sistema está obligado a evolucionar sobre la subvariedad C. Para ello ha de actuar sobre el sistema una *fuerza de ligadura* R que, en general, depende de las velocidades, luego $\mathrm{R} \in \mathfrak{X}(M, \tau_M)$ y, además, es desconocida en principio.

La ecuación de Newton para este caso está referida a curvas $\gamma \colon [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow C$ tales que

1. $\dot\gamma(t) \in C$, $\forall t$.
2. $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \mathrm{F} \circ \gamma + \mathrm{R} \circ \dot\gamma$.

Se trata de establecer condiciones que permitan resolver el problema y evaluar R.

Sea $(p, u) \in C$. La condición impuesta sobre C (que $\tau_M(C) = M$) indica que la dimensión del subespacio de $\mathrm{V}_{(p,u)}(\mathrm{T}M)$ que es tangente a C, no depende del punto (p, u). Sea

$$\mathrm{T}^V_{(p,u)}C = \{w \in \mathrm{V}_{(p,u)}(\mathrm{T}M) \ ; \ w \in \mathrm{T}_{(p,u)}C\}$$

el subespacio vertical tangente a C. Considérese la aplicación *levantamiento vertical* (al punto (p, u))

$$\lambda_p^{(p,u)} \colon \mathrm{T}_pM \longrightarrow \mathrm{V}_{(p,u)}(\mathrm{T}M)$$

(que es un isomorfismo). Sea $(\mathrm{T}^V_{(p,u)}C)_p$ la antiimagen de $\mathrm{T}^V_{(p,u)}C$ por $\lambda_p^{(p,u)}$. Entonces:

Hipótesis 2 (Principio de D'Alembert no holónomo*): La fuerza de ligadura* $\mathrm{R} \in \mathfrak{X}(M,\tau_M)$ *satisface que, para todo* $(p,u) \in C$*,*

$$\mathrm{R}(p,u) \in (\mathrm{T}^V_{(p,u)}C)_p^\perp$$

es decir, $g(\mathrm{R}(p,u),v) = 0$*,* $\forall v \in (\mathrm{T}^V_{(p,u)}C)_p$*.*

Comentario:

Los elementos de $(\mathrm{T}^V_{(p,u)}C)_p$ se denominan *velocidades virtuales*, en la nomenclatura física clásica.

Este principio permite obtener la fuerza de ligadura (sobre una trayectoria). En efecto; sea $\phi \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}M)$ y $\mathrm{d}^V\phi \in \Omega^1(M,\tau_M)$ la 1-forma definida por

$$(\mathrm{d}^V\phi(p,u))(v) = \mathrm{d}\phi(\lambda_p^{(p,u)}(v))$$

(donde $v \in \mathrm{T}_pM$), cuya expresión local, en una carta de coordenadas naturales (q^i,v^i) de $\mathrm{T}M$, es $\mathrm{d}^V\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial v^i}\mathrm{d}q^i$. Entonces:

Proposición 8 *La condición necesaria y suficiente para que* $w \in (\mathrm{T}^V_{(p,u)}C)_p$ *es que* $(\mathrm{d}^V\phi(p,u))(w) = 0$*. para toda* $\phi \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}M)$ *tal que* $j_C^*\phi = 0$*.*

(*Dem.*) Se tiene que $\forall\phi \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}M)$ tal que $j_C^*\phi = 0$,

$$w \in (\mathrm{T}^V_{(p,u)}C)_p \Leftrightarrow \lambda_p^{(p,u)}(w) \in \mathrm{T}^V_{(p,u)}C \Leftrightarrow \lambda_p^{(p,u)}(w)\phi = 0 \Leftrightarrow \mathrm{d}\phi(\lambda_p^{(p,u)}(w)) = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{d}^V\phi(p,u))(w) = 0$$

■

Nótese que, si $\eta \in \Omega^1(M,\tau_M)$, entonces $j_C^*\eta \in \Omega^1(C,\tau_M \circ j_C)$. De aquí:

Proposición 9 *Si* $\mathrm{R} \in \mathfrak{X}(M,\tau_M)$ *y* $(p,u) \in C$*, entonces* $\mathrm{R}(p,u) \in (\mathrm{T}^V_{(p,u)}C)_p^\perp$ *si, y sólo si,*

$$(j_C^*(i(\mathrm{R})g))\big|_{(\mathrm{T}^V_{(p,u)}C)_p} = 0$$

(*Dem.*) Obsérvese que $i(\mathrm{R})g \in \Omega^1(M,\tau_M)$. Sea $w \in (\mathrm{T}^V_{(p,u)}C)_p$; entonces

$$(i(\mathrm{R})g)(w)(p,u) = g(\mathrm{R}(p,u),w) = 0$$

ya que $\mathrm{R}(p,u) \in (\mathrm{T}^V_{(p,u)}C)_p^\perp$. ■

Ahora el problema es estudiar cómo son los elementos de $\Omega^1(M,\tau_M)$ que satisfacen esa condición de anulación. Para ello supóngase que C está definida locálmente por la anulación de r funciones $\{\phi^i\}$ (con $r < m = \dim\, M$), con la condición *rang* $\left(\dfrac{\partial\phi^1,\ldots,\phi^r}{\partial v^1,\ldots,v^n}\right) = r$. Entonces, en esas condiciones se tiene:

Proposición 10 *Sea* $\eta \in \Omega^1(M,\tau_M)$*. Entonces,* $\forall(p,u) \in C$*, se tiene que* $j_C^*\eta|_{(\mathrm{T}^V_{(p,u)}C)_p} = 0$ *si, y sólo si, existen* $f_1,\ldots,f_r \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}M)$ *tales que* $\eta = f_i\mathrm{d}^V\phi^i$

(*Dem.*) Sea $(p,u) \in C$. Salvo un cambio de orden en las coordenadas $q^1,\ldots,q^m$ se puede suponer que

$$\det\left(\frac{\partial\phi^1,\ldots,\phi^r}{\partial v^1,\ldots,v^r}\right) \neq 0$$

De ahí $\mathrm{d}^V\phi^1(p,u),\dots,\mathrm{d}^V\phi^r(p,u)$ son linealmente independientes en T^*_pM. Sea $\lambda_p^{(p,u)}\colon \mathrm{T}_pM \longrightarrow \mathrm{V}_{(p,u)}(\mathrm{T}M)$ el levantamiento vertical al punto (p,u), y ${}^t\lambda_p^{(p,u)}\colon \mathrm{T}^*_pM \longrightarrow \mathrm{V}^*_{(p,u)}(\mathrm{T}M)$ su aplicación traspuesta. Es fácil probar que

$$\{\mathrm{d}^V\phi^1(p,u),\dots,\mathrm{d}^V\phi^r(p,u),{}^t\lambda_p^{(p,u)}(\mathrm{d}v^{r+1}(p,u)),\dots,{}^t\lambda_p^{(p,u)}(\mathrm{d}v^m(p,u))\}$$

es una base de T^*_pM (para ello basta calcular sus coordenadas en la base $\left\{\dfrac{\partial}{\partial q^i}\right\}_{i=1,\dots,m}$ de T_pM). De ahí, existen números reales $\alpha_1,\dots,\alpha_r,\zeta_1,\dots,\zeta_{m-r}$ tales que

$$(j_C^*\eta)(p,u)=\eta(p,u)=\alpha_i\mathrm{d}^V\phi^i(p,u)+\zeta_j\,{}^t\lambda_p^{(p,u)}(\mathrm{d}v^j(p))$$

Sea, ahora, $u_1,\dots,u_m\in\mathrm{T}_pM$ la base dual de la anterior. Obsérvese que $u_{r+1},\dots,u_m$ generan $(\mathrm{T}^V_{(p,u)}C)_p$, ya que

$$(\lambda_p^{(p,u)}u_i)\phi^j=0,\quad (\forall j)\quad\Leftrightarrow\quad i>r$$

De ahí, la condición necesaria y suficiente para que $(j_C^*\eta)(p,u)$ se anule sobre $(\mathrm{T}^V_{(p,u)}C)_p$ es que $(j_C^*\eta(p,u))(u_i)=0$, $(i>r)$; esto es, $\zeta_j=0$, para todo $j=r+1,\dots,m$. Finalmente, puesto que el resultado es válido en todos los puntos de C definidos por la anulación de $\phi_1,\dots,\phi_r$, la demostración ha concluido.

(Obsérvese que las funciones f_i dependen de las velocidades, ya que la base de T^*_pM utilizada depende de $(p,u)\in C$). ■

La proposición anterior permite enunciar el llamado Principio de D'Alembert no holónomo dual: La forma de trabajo correspondiente a la fuerza de ligadura se anula sobre las velocidades virtuales del sistema.

De aquí se obtiene como resultado inmediato que:

Corolario 2 *Si* R *es la fuerza de ligadura (no holónoma), entonces existen* $f^1,\dots,f^r\in\mathrm{C}^\infty(M)$ *tal que*

$$i(\mathrm{R})g=f_i\mathrm{d}^V\phi^i=f_i\frac{\partial\phi^i}{\partial v^j}\mathrm{d}q^j$$

y, en consecuencia

$$\mathrm{R}=f_i\frac{\partial\phi^i}{\partial v^j}g^{jk}\frac{\partial}{\partial q^k}$$

Definición 7 $f^1,\dots,f^r$ *se denominan* multiplicadores de Lagrange *del sistema no holónomo.*

1.7.2 Ecuaciones dinámicas

De acuerdo con los resultados precedentes, si C está localmente definida por la anulación de r funciones $\{\phi^i\}$, y son ligaduras independientes, entonces las ecuaciones dinámicas son

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=\mathrm{F}\circ\gamma+f_j\,i(\mathrm{d}^V\phi^j)g^{-1}\circ\dot\gamma$$

o, en forma dual

$$\nabla_{\dot\gamma}(\theta\circ\dot\gamma)=\omega\circ\gamma+f_j\mathrm{d}^V\phi^j\circ\dot\gamma$$

que, unidas a las ligaduras que definen C, forman un sistema de $m+r$ ecuaciones con $m+r$ incógnitas: las componentes de γ y los multiplicadores f_i.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial v^j}\circ\dot\gamma\right)-\frac{\partial T}{\partial q^j}\circ\dot\gamma=\omega_j\circ\gamma+f_k\frac{\partial\phi^k}{\partial v^j}\circ\dot\gamma\qquad(j=1,\dots,m)$$

(pues $\omega=\omega_k\mathrm{d}q^k$, con $\omega_k=g_{kj}\mathrm{F}^j$).

Si el sistema es conservativo, entonces $\omega = -\mathrm{d}V$, donde $V \in \mathrm{C}^\infty(M)$ es la función potencial. En ese caso, introduciendo la función lagrangiana $\mathcal{L} := T - \tau_M^* V$, resulta

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^j} \circ \dot{\gamma}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} \circ \dot{\gamma} = f_k \frac{\partial \phi^k}{\partial v^j} \circ \dot{\gamma} \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

En cualquier caso, estas ecuaciones junto con las ligaduras que definen C, forman también un sistema de $m + r$ ecuaciones con $m + r$ incógnitas.

1.8 Sistemas Newtonianos dependientes del tiempo

1.8.1 Sistemas mecánicos con fuerzas dependientes del tiempo

En el estudio de los sistemas mecánicos es frecuente que, en algunos casos, las fuerzas que actúan sobre el sistema dependan también del tiempo. Vamos a ver, a continuación, como se plantea la descripción geométrica de estos sistemas.

En estos casos, el modelo geométrico a utilizar es el siguiente:

Definición 8 *Un* sistema dinámico Newtoniano dependiente del tiempo *es una terna* $(\mathbb{R} \times M, g, \mathrm{F})$*, donde* (M, g) *es una variedad de Riemann y el campo de fuerzas es* $\mathrm{F} \in \mathfrak{X}(M, \pi_2)$ *(con* $\pi_2 \colon \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$*); esto es,*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{T}M \arrow[d, "\tau_M"] \\ \mathbb{R} \times M \arrow[ur, "\mathrm{F}"] \arrow[r, "\pi_2"'] & M \end{tikzcd}$$

Si, además, la fuerza depende de las velocidades*, entonces* $\mathrm{F} \in \mathfrak{X}(M, \tau_M \circ \rho_2)$ *(con* $\rho_2 \colon \mathbb{R} \times \mathrm{T}M \longrightarrow \mathrm{T}M$*; esto es,*

$$\begin{tikzcd} & & \mathrm{T}M_\mu \arrow[d, "\tau_M"] \\ \mathbb{R} \times M \arrow[urr, "\mathrm{F}"] \arrow[r, "\rho_2"] & \mathrm{T}M \arrow[r, "\tau_M"] & M \end{tikzcd}$$

Las ecuaciones de Newton se escriben en la forma acostumbrada:

- En el primer caso (fuerza independiente de las velocidades)

  $$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \mathrm{F} \circ \bar{\gamma}$$

  donde $\bar{\gamma} = (t, \gamma) \colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow I \times M$. También se pueden expresar en la forma dual utilizando la correspondiente forma de trabajo que será $\omega \in \Omega^1(M, \pi_2)$.

- En el segundo caso (fuerza dependiente de las velocidades)

  $$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \mathrm{F} \circ \bar{\dot{\gamma}}$$

  donde $\bar{\dot{\gamma}} = (t, \dot{\gamma}) \colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow I \times \mathrm{T}M$. También se pueden expresar en la forma dual utilizando la correspondiente forma de trabajo que será $\omega \in \Omega^1(M, \tau_M \circ \rho_2)$.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son las mismas que de costumbre, salvo por el hecho de que el segundo miembro depende ahora explícitamente de $t \in \mathbb{R}$. En particular si, por ejemplo, $\omega \in \Omega^1(M, \pi_2)$, el sistema dependiente del tiempo es *conservativo* si existe $V \colon \mathbb{R} \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\omega = -\mathrm{d}V_t$, donde $V_t \colon M \longrightarrow M$

se define como $V_t(p) := V(t,p)$, $\forall p \in M$ y $\forall t \in \mathbb{R}$. En este caso se puede definir la función lagrangiana $\mathcal{L} := T - V$, que tendrá dependencia explícita en el tiempo, y las ecuaciones de Euler-Lagrange son las mismas de siempre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} \circ \bar{\dot{\gamma}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \circ \bar{\dot{\gamma}} = 0$$

Los sistemas dependientes del tiempo con ligaduras holónomas y no holónomas se tratan del mismo modo que este último caso, como vamos a ver brevemente a continuación.

1.8.2 Sistemas con ligaduras holónomas dependientes del tiempo

Esta situación corresponde a tener un sistema mecánico Newtoniano con ligaduras de tipo holónomo dependientes del tiempo. La modelización geométrica es la siguiente:

Definición 9 *Un* sistema dinámico Newtoniano holónomo dependiente del tiempo *es una terna* (M, g, ω)*, (donde* (M,g) *es una variedad de Riemann y* $\omega \in \Omega^1(M)$*), y una* inmersión homeomorfa *("imbedding")* $j\colon S \hookrightarrow \mathbb{R} \times M$*, (*$S$ *es una subvariedad de* $\mathbb{R} \times M$*.*

En este caso hay que suponer que la fuerza de ligadura depende del tiempo, es decir, $\mathrm{R} \in \mathfrak{X}(M, \tau_M \circ \rho_2)$. La ecuación de Newton es

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \mathrm{F} \circ \bar{\gamma} + \mathrm{R} \circ \bar{\dot{\gamma}}$$

y el *Principio de d'Alembert* se enuncia como sigue:

Hipótesis 3 (Principio de D'Alembert (dependiente del tiempo))*: La fuerza de ligadura* $\mathrm{R} \in \mathfrak{X}(M, \tau_M \circ \rho_2)$ *satisface que, para todos* $t \in \mathbb{R}$*,* $p \in S$ *y* $u, v \in \mathrm{T}_pS$*,*

$$g(\mathrm{R}(t, \mathrm{T}_p j(u)), \mathrm{T}_p j(v)) = 0$$

Y los resultados posteriores son iguales que en el caso no dependiente del tiempo (ver apartado 1.5).

1.8.3 Sistemas con ligaduras no holónomas dependientes del tiempo

La situación ahora corresponde a tener un sistema mecánico Newtoniano con ligaduras no holónomas dependientes del tiempo. Entonces:

Definición 10 *Un* sistema dinámico Newtoniano no holónomo dependiente del tiempo *es una terna* (M, g, ω)*, (donde* (M,g) *es una variedad de Riemann y* $\omega \in \Omega^1(M)$*), y una* inmersión homeomorfa *("imbedding")* $j\colon C \hookrightarrow \mathrm{T}M$*, tales que* $(\tau_M \circ j)(C) = M$*, en donde* C *es una variedad diferencial.*

En este caso hay una fuerza de ligadura que depende del tiempo, es decir, $\mathrm{R} \in \mathfrak{X}(M, \tau_M \circ \rho_2)$ que hace que las trayectorias dinámicas del sistema $\gamma\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ satisfagan que $\dot{\gamma}(t) \in \mathrm{T}C$, $\forall t \in I$. De ahí la ecuación de Newton es

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \mathrm{F} \circ \bar{\gamma} + \mathrm{R} \circ \bar{\dot{\gamma}}$$

Para establecer el *Principio de d'Alembert no holónomo*, para cada $t \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{p} \in C$, hay que definir $(\mathrm{T}_{j(\mathbf{p})}C)_M$, como en el caso independiente del tiempo (ver apartado 1.7), lo que se hace de la siguiente forma:

Sea $\mathbf{p} \in C$, $j(\mathbf{p}) = (p,u) \in C \subset \mathrm{T}M$. Al igual que en el caso independiente del tiempo, tomamos $\mathrm{T}^V_{(p,u)}C$ y de ahí $(\mathrm{T}^V_{(p,u)}C)_p$

Hipótesis 4 (Principio de D'Alembert no holónomo (dependiente del tiempo)*): La fuerza de ligadura* $\mathrm{R} \in \mathfrak{X}(M, \tau_M \circ \rho_2)$ *satisface que,*

$$g(\mathrm{R}(t, (p, u)), v) = 0, \qquad \forall v \in (\mathrm{T}^V_{(p,u)} C)_p$$

para todo $(p, u) \in C$*,* $(p, u) = j(\boldsymbol{p})$*,* $\boldsymbol{p} \in C$*, y para todo* $t \in \mathbb{R}$*. Esto es,* $\mathrm{R}(t, j(\boldsymbol{p})) \in (\mathrm{T}_{j(\boldsymbol{p})} C)^{\perp}_{(\tau_M \circ j)(\boldsymbol{p})}$*, para todo* $\boldsymbol{p} \in C$ *y todo* $t \in \mathbb{R}$*.*

Los resultados posteriores son iguales que en el caso no dependiente del tiempo (ver apartado 1.7), con la única diferencia de que los multiplicadores de Lagrange son, ahora, $f_i \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathrm{T}M)$.

2 Sistemas dinámicos lagrangianos

En la sección anterior se ha analizado la geometría de los sistemas dinámicos Newtonianos; esto es, de los sistemas *mecánicos clásicos*. Sin embargo, en Física existen muchos tipos de sistemas dinámicos que no son puramente *mecánicos* y que, no obstante, pueden también ser descritos geométricamente.

El objetivo, en este capítulo, es sentar las bases de un formalismo geométrico que, en particular, contempla el caso de los sistemas mecánicos Newtonianos conservativos (independientes del tiempo, con o sin ligaduras holónomas [4]), pero que permite describir también otros tipos de sistemas dinámicos *autónomos* (con un número finito de grados de libertad). Éste será el *formalismo lagrangiano* de los sistemas dinámicos denominados *lagrangianos*, y la correspondiente formulación dual: el *formalismo hamiltoniano canónico* asociado.

2.1 Estructuras geométricas de los fibrados tangente y cotangente

En el fibrado tangente existen tres estructuras geométricas canónicas: el *fibrado vertical*, el *endomorfismo vertical* y el *campo de Liouville*. Además, son característicos en $\mathrm{T}Q$ los campos vectoriales que corresponden a *ecuaciones diferenciales de segundo orden* en la variedad Q. Análogamente, el fibrado cotangente está dotado con formas diferenciales canónicas. Vamos a presentar con todo detalle todos estos conceptos.

2.1.1 Fibrado tangente de una variedad diferencial

Definición 11 *Sea Q una variedad diferencial y $x \in Q$. Cada curva diferenciable $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \longrightarrow Q$ con $\gamma(0) = x$ (esto es, que pase por x) induce una derivación D_γ sobre $\mathrm{C}^\infty(Q)$, de la siguiente forma*

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{D}_\gamma\colon & \mathrm{C}^\infty(Q) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{(f\circ\gamma)(t)-(f\circ\gamma)(0)}{t} \end{array}$$

En el conjunto de las curvas diferenciables se establece la siguiente relación de equivalencia:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad \text{sii} \quad \mathrm{D}_{\gamma_1} = \mathrm{D}_{\gamma_2}$$

Entonces:

1. *Se denomina* vector tangente *a Q en x a cada una de las clases de equivalencia definidas por esta relación.*
2. *Se denomina* espacio tangente *a Q en x, y se designa por T_xQ, al conjunto de todos los vectores tangentes a Q en x.*
3. *Se denomina* fibrado tangente *de Q, a $\mathrm{T}Q := \bigcup_{x\in Q} \mathrm{T}_xQ$. Se designa por $\tau_Q\colon \mathrm{T}Q \longrightarrow Q$ a la proyección natural.*

Todo punto $m \in \mathrm{T}Q$ es, pues, una pareja (x, u) donde $x = \tau_Q(m) \in Q$ y $u \in \mathrm{T}_xQ$ (es un vector tangente).

El primer resultado fundamental concierne a la estructura de variedad del fibrado tangente.

Proposición 11 *Sea Q una variedad diferencial n-dimensional. El fibrado tangente $\mathrm{T}Q$ es una variedad diferencial de dimensión $2n$, cuya estructura está inducida por la de Q. Además, la proyección natural τ_Q es una submersión.*

[4] La generalización de sistemas conservativos con ligaduras no holónomas se haría a partir del modelo que se va a introducir, siguiendo pautas análogas a las empleadas en el caso de los sistemas Newtonianos. No obstante, este tema no se considera en este curso.

(*Dem.*) Si $\mathcal{A} = \{(U_\alpha; \phi_\alpha)\}$, con $\phi_\alpha \equiv (x^1, \dots, x^n)$, es un atlas de cartas locales de Q, entonces el atlas inducido en T^*Q es $\mathrm{T}\mathcal{A} = \{(\tau_Q^{-1} U_\alpha; \psi_\alpha)\}$, con las funciones coordenadas ψ_α definidas del siguiente modo:

$$\begin{array}{cccccc} \psi_\alpha & : & \tau_Q^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & \phi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \\ & & m = (x, u) & \mapsto & (q^i(m), v^i(m)) \end{array}$$

donde:

1. $q^i(m) = (x^i \circ \tau_Q)(m)$ [5].
2. Si $u = \lambda^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}\Big|_x$, entonces $v^i(m) = \lambda^i$; es decir, $v^i(m)$ son las componentes del vector tangente $u \in \mathrm{T}_x Q$ en la base $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x \right\}$.

Es obvio que $\mathrm{T}Q = \bigcup_\alpha \tau_Q^{-1}(U_\alpha)$ y que ψ_α son biyecciones, a las que se impone la condición de ser difeomorfismos. Entonces, es inmediato comprobar que $\mathrm{T}\mathcal{A}$ dota a $\mathrm{T}Q$ de estructura de variedad diferencial. Si $(U; q^i)$ y $(\bar{U}; \bar{q}^i)$ son dos cartas locales en Q tales que $U \cap \bar{U} \neq \emptyset$, y $\bar{q}^j = \varphi^j(q^i)$ en $U \cap \bar{U}$, entonces para las cartas inducidas $(\tau_Q^{-1}(U); q^i, v^i)$ y $(\tau_Q^{-1}\bar{U}); \bar{q}^i, \bar{v}^i)$ en $\mathrm{T}Q$ se tiene que, en $\mathrm{T}U \cap \mathrm{T}\bar{U}$, la relación entre las coordenadas v^i y $\bar{v}^i$ es $\bar{v}^j = \dfrac{\partial \varphi^j}{\partial q^i} v^i$; ya que

$$u = v^i \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_x = v^i \frac{\partial \varphi^j}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial \bar{q}^j}\Big|_x = \bar{v}^j \frac{\partial}{\partial \bar{q}^j}\Big|_x$$

de donde $\bar{v}^j = \dfrac{\partial \varphi^j}{\partial q^i} v^i$.

Teniendo presente esta descripción local del fibrado tangente, es evidente que su dimensión es $2n$, ya que se ha doblado el número de coordenadas en relación a las de Q.

Finalmente, probar que τ_Q es una submersión es inmediato, ya que la proyección canónica $\tau_Q \colon \mathrm{T}Q \longrightarrow Q$, es una aplicación sobreyectiva que, en coordenadas naturales, está dada por $\tau_Q(q^i, v^i) = q^i$. Su aplicación tangente $\mathrm{T}\tau_Q \colon \mathrm{TT}Q \longrightarrow \mathrm{T}Q$ está definida de la siguiente manera: si $(x, u) \in \mathrm{T}Q$ y $V \in \mathrm{T}_{(x,u)}(\mathrm{T}Q)$ se tiene que $V = \lambda^i \dfrac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{(x,u)} + \mu^i \dfrac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{(x,u)}$, y

$$[\mathrm{T}_{(x,u)}\tau_Q(V)](q^j) = X(q^j \circ \tau_Q) = X(q^j) = \lambda^j$$

de donde

$$(\mathrm{T}\tau_Q)((x,u), X) = (\mathrm{T}\tau_Q)\left((x,u), \lambda^i \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{(x,u)} + \mu^i \frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{(x,u)}\right) = \left(x, \lambda^i \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_x\right)$$

luego tiene por matriz asociada la siguiente

$$\mathrm{T}\tau_Q|_{(x,u)} = (I_{n\times n}, 0_{n\times n}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

De todo ello se concluye que τ_Q es una submersión sobreyectiva. ∎

Definición 12 *Las cartas anteriores se denominan* cartas naturales del fibrado tangente *y sus coordenadas* coordenadas naturales *(q^i son las coordenadas en la base y v^i las coordenadas en las fibras).*

[5] Se suele cometer un abuso de notación, designando por q^i tanto a las coordenadas x^i de la variedad Q, como a las coordenadas en la base del fibrado, y así lo haremos en adelante.

Obsérvese que los cambios de coordenadas en TQ, de (q^i, v^i) a $(\bar{q}^i, \bar{v}^i)$, tienen como matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial q^i}\right) & 0 \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial q^k \partial q^i}\right) v^i & \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial q^i}\right) \end{pmatrix}$$

luego, teniendo en cuenta que su jacobiano es no nulo en todos los puntos, se concluye que:

Corolario 3 TQ *es una variedad orientable.*

Comentario:

El fibrado tangente de una variedad diferencial es un ejemplo de la estructura denominada *fibrado vectorial*. Esencialmente, un *fibrado vectorial* sobre una variedad B consiste en situar en cada punto de B un espacio vectorial. Más precisamente:

Definición 13 *un* fibrado vectorial *es una terna* (E, B, π)*, donde* E, B *son variedades diferenciales (con* $\dim B = m$*,* $\dim E = m + n$*) y* $\pi\colon E \longrightarrow B$ *es una submersión exhaustiva tal que, para todo punto* $p \in B$ *existe una carta local* (U, ϕ)*,* $p \in U$*, y una aplicación diferenciable* $\psi\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^n$ *verificando que:*

1. *Si* $\pi_1\colon \phi(U) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \phi(U)$ *es la proyección natural, entonces* $\pi_1 \circ \phi = \pi$.
2. $E_p = \pi^{-1}(p)$ *tiene estructura de espacio vectorial y, si* $\pi_2\colon \phi(U) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es la proyección natural, entonces las aplicaciones*

$$\begin{array}{cccc} \psi_p & : & E_p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & u & \mapsto & (\pi_2 \circ \psi)(p, u) \end{array}$$

son morfismos de espacios vectoriales.

E *se denomina* variedad total *del fibrado,* B *es la* variedad base*,* π *la proyección del fibrado,* $\mathbb{R}^n$ *es la* fibra tipo*,* n *es el* rango del fibrado *y* E_p*,* $\forall p \in B$*, es la* fibra *sobre* p*. La pareja* (U, ϕ) *se denomina* abierto trivializante *y* ψ *es la* aplicación de coordenadas.

2.1.2 El subfibrado vertical. Levantamiento vertical

Considerando la proyección canónica $\tau_Q\colon \mathrm{T}Q \longrightarrow Q$, y su aplicación tangente $\mathrm{T}\tau_Q\colon \mathrm{TT}Q \longrightarrow \mathrm{T}Q$ anteriormente introducida, se define:

Definición 14 *Sea* $\mathrm{V}_{(x,u)\in \mathrm{T}Q}(\tau_Q) := \ker \mathrm{T}_{(x,u)}\tau_Q$*. Se denomina* subfibrado vertical *de* TTQ *al fibrado vectorial (de rango n)* $\mathrm{V}(\tau_Q) \longrightarrow \mathrm{T}Q$*, donde*

$$\mathrm{V}(\tau_Q) := \bigcup_{(x,u)} \mathrm{V}_{(x,u)}(\tau_Q)$$

Definición 15 *Se denominan* campos verticales *a las secciones del fibrado vertical* $\mathrm{V}(\tau_Q) \longrightarrow \mathrm{T}Q$.

El conjunto de estos campos se designa por $\mathfrak{X}^V(\mathrm{T}Q)$.

Es inmediato comprobar que, en coordenadas naturales de TQ, la expresión de estos campos es $f^i \dfrac{\partial}{\partial v^i}$; es decir, $\mathfrak{X}^V(\mathrm{T}Q)$ está localmente generado por $\left\{\dfrac{\partial}{\partial v^i}\right\}$.

Con el fin de analizar las fibras de $\mathrm{V}(\tau_Q)$, dado $x \in Q$, considérese T_xQ, espacio vectorial de dimensión n, como variedad diferencial y la inmersión natural

$$\begin{array}{rccc} j_x\colon & \mathrm{T}_xQ & \longrightarrow & \mathrm{T}Q \\ & u & \mapsto & (x,u) \end{array}$$

Obsérvese que $\tau_Q \circ j_x$ es la aplicación constante igual a x. Si $u \in \mathrm{T}_xQ$, se tiene que

$$\mathrm{T}_u j_x \colon \mathrm{T}_u\mathrm{T}_xQ \longrightarrow \mathrm{T}_{(x,u)}\mathrm{T}Q$$

pero, por ser $\tau_Q \circ j_x$ una aplicación constante, resulta que $\mathrm{T}_u(\tau_Q \circ j_x) = \mathrm{T}_{(x,u)}\tau_Q \circ \mathrm{T}_u j_x = 0$. Esto es equivalente a decir que $\mathrm{Im}\,\mathrm{T}_u j_x \subseteq \ker \mathrm{T}_{(x,u)}\tau_Q = \mathrm{V}_{(x,u)}(\tau_Q)$. Pero, por ser j_x inmersión,

$$\dim\,\mathrm{Im}\,\mathrm{T}_u j_x = \dim\,(\mathrm{T}_u\mathrm{T}_xQ = n = \dim\,\mathrm{V}_{(x,u)}(\tau_Q)$$

luego se tiene que $\mathrm{Im}\,\mathrm{T}_u j_x = \mathrm{V}_{(x,u)}(\tau_Q)$, (ya que ambos tienen la misma dimensión y el primero está contenido en el segundo).

De todo ello resulta que $\mathrm{V}_{(x,u)}(\tau_Q)$ se identifica de manera natural con $\mathrm{T}_u\mathrm{T}_xQ$ a través del isomorfismo que induce $\mathrm{T}_u j_x$ en su imagen. Por otra parte, por ser T_xQ un espacio vectorial, si $u \in \mathrm{T}_xQ$, se tiene que T_xQ se identifica de forma canónica con $\mathrm{T}_u(\mathrm{T}_xQ)$ por medio de la derivada direccional [6]. Asi pués, $\mathrm{V}_{(x,u)}(\tau_Q)$ está también, canónicamente identificado con T_xQ [7]. Así pués, hemos construido el isomorfismo de espacios vectoriales

$$\begin{array}{ccl} \mathrm{T}_xQ & \longrightarrow & \mathrm{T}_u\mathrm{T}_xQ \simeq \mathrm{V}_{(x,u)}(\tau_Q) \subset \mathrm{T}_{(x,u)}\mathrm{T}Q \\ v & \mapsto & \mathrm{D}_v(x,u) \end{array}$$

donde, si $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}Q)$, se tiene

$$(D_v(x,u))f = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x,u+tv) - f(x,u)}{t}$$

Definición 16 *El vector* $\mathrm{D}_v(x,u)$ *se denomina* levantamiento vertical *de v al punto (x,u), y la la aplicación*

$$\begin{array}{cccc} \xi^V_{(x,u)} & : \ \mathrm{T}_xQ & \longrightarrow & \mathrm{T}_{(x,u)}\mathrm{T}Q \\ & v & \mapsto & \mathrm{D}_v(x,u) \end{array}$$

que realiza el isomorfismo anterior se llama levantamiento vertical.

En coordenadas naturales, si $v = \lambda^i \dfrac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{(x,u)}$, entonces $\xi^V_{(x,u)}(v) = \lambda^i \dfrac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{(x,u)}$.

El levantamiento vertical se extiende de manera natural a los campos de $\mathfrak{X}(Q)$. La aplicación levantamiento vertical entre campos, $\mathfrak{X}(Q) \longrightarrow \mathfrak{X}^V(\mathrm{T}Q)$, es $\mathrm{C}^\infty(Q)$-lineal.

En coordenadas naturales, si $X = f^i \dfrac{\partial}{\partial q^i}$, entonces su levantamiento vertical es $\xi^V(X) \equiv X^V = \tau_Q^* f^i \dfrac{\partial}{\partial v^i}$.

[6] Recuérdese que, si F es un espacio vectorial y $u \in F$, la identificación natural entre F y T_uF viene dada de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathrm{T}_uF \\ v & \mapsto & \mathrm{D}_v(u) \end{array}$$

donde $\mathrm{D}_v(u)$ es la derivada direccional respecto al vector v en el punto u; esto es, si $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es cualquier función diferenciable,

$$(\mathrm{D}_v(u))f := \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(u+tv) - f(u)}{t}$$

Si $x^1,\ldots,x^n$ son coordenadas en F y $v = (\lambda^1,\ldots,\lambda^n)$, entonces $(\mathrm{D}_v(u))f = \lambda^i \dfrac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_u$ y, por tanto, $\mathrm{D}_v(u) = \lambda^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_u$, con lo que la identificación es inmediata.

[7] Dicho de otra manera, $\mathrm{V}(\tau_Q)$ es el "pull-back" a $\mathrm{T}Q$ del fibrado $\mathrm{T}Q$ sobre Q mediante la aplicación τ_Q; esto es:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{V}(\tau_Q) & \simeq & \tau_Q^*(\mathrm{T}Q) & \longrightarrow & \mathrm{T}Q \\ & & \tau_{\mathrm{T}Q}\downarrow & & \downarrow\tau_Q \\ & & \mathrm{T}Q & \xrightarrow{\tau_Q} & Q \end{array}$$

2.1.3 El endomorfismo vertical o canónico

Definición 17 *Sea $(x,u) \in \mathrm{T}_xQ$. La aplicación*

$$\begin{array}{rccc} J_{(x,u)}\colon & \mathrm{T}_{(x,u)}\mathrm{T}Q & \longrightarrow & \mathrm{T}_{(x,u)}\mathrm{T}Q \\ & Y & \mapsto & \mathrm{D}_{(\mathrm{T}_{(x,u)}\tau_Q)Y}(x,u) \end{array}$$

se denomina endomorfismo vertical *o* canónico *(en (x,u)).*

Obsérvese que $J_{(x,u)}Y$ es el levantamiento vertical de $(\mathrm{T}_{(x,u)}\tau_Q)Y$ al punto (x,u); es decir, $J_{(x,u)}$ consiste en proyectar sobre T_xQ y levantar verticalmente.

Está claro que la imagen de $J_{(x,u)}$ está en $\mathrm{V}_{(x,u)}(\tau_Q)$ y, por ser $\mathrm{T}_{(x,u)}\tau_Q$ sobreyectiva, coincide con $\mathrm{V}_{(x,u)}(\tau_Q) = \ker\, J_{(x,u)}$. Por consiguiente:

Proposición 12 *1.* $\mathrm{Im}\, J_{(x,u)} = \mathrm{V}_{(x,u)}(\tau_Q) = \ker\, J_{(x,u)}$.

2. $J^2_{(x,u)} = 0$.

La acción de J se extiende de manera natural a los campos vectoriales

$$J\colon \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q) \longrightarrow \mathfrak{X}^V(\mathrm{T}Q) \subset \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$$

y a las formas diferenciales del siguiente modo:

$$\begin{array}{rcccc} J^* & : & \Omega^p(\mathrm{T}Q) & \longrightarrow & \Omega^p(\mathrm{T}Q) \\ & & \alpha & \mapsto & i(J)\alpha \end{array}$$

donde $J^*\alpha = i(J)\alpha$ está definida por

$$[i(J)\alpha](X_1,\ldots,X_p) := \sum_{i=1}^{p} \alpha(X_1,\ldots,J(X_i),\ldots,X_p)$$

en particular, si $p=1$, entonces $i(J)\alpha = \alpha\circ J$, que es una 1-forma que tiene la propiedad de que $i(X)(i(J)\alpha) = 0$, $\forall X \in \mathfrak{X}^V(\mathrm{T}Q)$. Este tipo de formas se llaman τ_Q-*semibásicas*.

Expresiones locales:

Si (q^i, v^i) es un sistema de coordenadas naturales en $\mathrm{T}Q$, se tiene que

$$J_{(x,u)}\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{(x,u)} = \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial q^i}\big|_x}(x,u) = \frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{(x,u)}$$

$$J_{(x,u)}\frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{(x,u)} = \mathrm{D}_0(x,u) = 0$$

luego la expresión de $J_{(x,u)}$ es

$$J_{(x,u)} = \mathrm{d}q^i\Big|_{(x,u)} \otimes \frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{(x,u)}$$

y por extensión

$$J = \mathrm{d}q^i \otimes \frac{\partial}{\partial v^i}$$

Comentario:

Obsérvese que J es un campo tensorial de tipo $(1,1)$ sobre $\mathrm{T}Q$.

2.1.4 El campo de Liouville

Definición 18 *Sea $x \in Q$ y $(x,v) \in \mathrm{T}Q$. Considérese el levantamiento vertical de $v \in \mathrm{T}_xQ$ al punto (x,v); es decir, $\mathrm{D}_v(x,v)$. Esta operación permite construir un campo vectorial $\Delta \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$, que es vertical y que se denomina* campo de Liouville*:*

$$\begin{array}{cccc} \Delta\colon & \mathrm{T}Q & \longrightarrow & \mathrm{TT}Q \\ & (x,v) & \mapsto & ((x,v),\mathrm{D}_v(x,v)) \end{array}$$

Expresiones locales:

Para ver que se trata de un campo vectorial diferenciable, se va a obtener su expresión en un sistema local de coordenadas (q^i,v^i) en $\mathrm{T}Q$. Sea $f\colon \mathrm{T}Q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $(x,v) \in \mathrm{T}Q$; se tiene

$$\Delta_{(x,v)}f = \mathrm{D}_v(x,v)f = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x,v+tv)-f(x,v)}{t}$$

de donde

$$\begin{aligned} \Delta_{(x,v)}q^i &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{q^i(x,v+tv)-q^i(x,v)}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{q^i(x)-q^i(x)}{t} = 0 \\ \Delta_{(x,v)}v^i &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{v^i(x,v+tv)-v^i(x,v)}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{(v+tv)(q^i)-v(q^i)}{t} = v(q^i) = v^i(x,v) \end{aligned}$$

con lo que la expresión local de Δ es

$$\Delta = v^i\frac{\partial}{\partial v^i}$$

Obsérvese que, si se consideran las fibras T_xQ del fibrado tangente, que son espacios vectoriales, entonces en cada punto $v \in \mathrm{T}_xQ$ se tiene que $\Delta_{(x,v)} = v$. De ahí que se diga que Δ es el campo que genera las dilataciones a lo largo de las fibras de $\mathrm{T}Q$. Otra manera de visualizar esta interpretación es considerar la expresión local de Δ y el sistema de ecuaciones diferenciales asociado

$$\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} = v^i \quad , \quad i = 1,\dots n$$

cuya solución general es

$$q^i(t) = A^i \qquad v^i(t) = B^ie^t \qquad (A^i, B^i \ ctes.) \quad , \quad i = 1,\dots n$$

Así pués, el flujo de Δ es

$$\begin{array}{cccc} F^\Delta & : & \mathbb{R}\times\mathrm{T}Q & \longrightarrow & \mathrm{T}Q \\ & & (t,q^i,v^i) & \mapsto & (q^i,v^ie^t) \end{array}$$

De ahí, los elementos del grupo uniparamétrico local de difeomorfismos generado por Δ son

$$\begin{array}{cccc} F^\Delta_t & : & \mathrm{T}Q & \longrightarrow & \mathrm{T}Q \\ & & (q^i,v^i) & \mapsto & (q^i,v^ie^t) \end{array}$$

esto es, homotecias sobre las fibras de razón positiva.

2.1.5 Levantamientos canónicos al fibrado tangente

Difeomorfismos:

Hay una manera natural (canónica) de *levantar* difeomorfismos, curvas y campos vectoriales en una variedad diferencial a su fibrado tangente.

Definición 19 *Sea Q una variedad diferencial y un difeomorfismo*

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & Q & \longrightarrow & Q \\ & & x & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$$

Se denomina levantamiento canónico *de φ a $\mathrm{T}Q$ al difeomorfismo*

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{T}\varphi & : & \mathrm{T}Q & \longrightarrow & \mathrm{T}Q \\ & & (x,v) & \mapsto & (x, \mathrm{T}_x\varphi(v)) \end{array}$$

Las siguientes propiedades son inmediatas a partir de la definición:

Proposición 13 *Sea Q una variedad diferencial.*

1. $\varphi^{-1} \circ \tau_Q \circ \mathrm{T}\varphi = \tau_Q$, *para todo difeomorfismo* $\varphi \colon Q \longrightarrow Q$.
2. $\mathrm{T}(\varphi \circ \phi) = \mathrm{T}\varphi \circ \mathrm{T}\phi$, *para todo par de difeomorfismos* $\varphi, \phi \colon Q \longrightarrow Q$.

Campos vectoriales:

Utilizando la definición de levantamiento canónico de difeomorfismos, se obtiene la siguiente:

Definición 20 *Sea Q una variedad diferencial y $Z \in \mathfrak{X}(Q)$. Se denomina* levantamiento completo *de Z a $\mathrm{T}Q$ al campo vectorial $Z^C \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ cuyos grupos uniparamétricos locales de difeomorfismos son los levantamientos canónicos $\{\mathrm{T}F_t\}$ de los grupos uniparamétricos locales de difeomorfismos $\{F_t\}$ de Z.*

Como consecuencia directa de la definición y del teorema de existencia y unicidad de grupos uniparamétricos locales de difeomorfismos se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 14 *Sea Q una variedad diferencial, $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ y $Z^C \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ su levantamiento completo. Entonces Z^C es τ_Q-proyectable y $\tau_{Q*}Z^C = Z$; esto es, $\mathrm{T}\tau_Q(Z^C_{(x,v)}) = Z_x$, para todo $(x,v) \in \mathrm{T}Q$.*

Expresión local:

En una carta de coordenadas naturales $(U; q^i)$ de Q, si

$$Z|_U = f^i(q^j)\frac{\partial}{\partial q^i}$$

resulta que, en la carta $(\tau_Q^{-1}(U); q^i, v^i)$ de $\mathrm{T}Q$

$$Z^C|_{\tau_Q^{-1}(U)} = f^i(q^j)\frac{\partial}{\partial q^i} + v^k \frac{\partial f^i}{\partial q^k}(q^j)\frac{\partial}{\partial v^i}$$

Para probarlo, basta recordar que, si $(x,u) \in \tau_Q^{-1}(U)$, entonces

$$Z^C(x,u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{T}F_t(x,u)$$

donde $\mathrm{T}F_t(x^i, v^i) = \left(F_t(x^i), \dfrac{\partial F_t}{\partial x^i} v^i \right)$ y, por tanto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{T}F_t(x,u) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} F_t(x), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \left(\frac{\partial F_t}{\partial x^i} v^i \right)(x,u) \right) = \left(f^i(x), v^j \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x^k) \right)$$

y de ahí el resultado.

Curvas diferenciables:

Sea ahora $\gamma\colon (a,b \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow Q$ una curva diferenciable. Si $t_0 \in (a,b)$ y $x = \gamma(t_0)$, entonces $\dot\gamma(t_0)$ es el vector tangente a la curva en el punto $\gamma(t_0)$; es decir $\dot\gamma(t_0) \in \mathrm{T}_{\gamma(t_0)}Q$. La definición es la habitual:

$$(\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)) = \mathrm{T}_{t_0}\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

esto es, si $f\colon Q \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable,

$$(\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0))f = (\mathrm{T}_{t_0}\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t_0}(f \circ \gamma) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(\gamma(t_0+h)) - f(\gamma(t_0))}{h}$$

Definición 21 *Dado que $\dot\gamma(t)$ está definido para todo $t \in (a,b)$, se puede definir la curva*

$$\begin{array}{cccc} \tilde\gamma\colon & (a,b) & \longrightarrow & \mathrm{T}Q \\ & t & \mapsto & (\gamma(t), \dot\gamma(t)) \end{array}$$

que se denomina subida *o levantamiento canónico de γ a* $\mathrm{T}Q$*.*

Obsérvese que $\tau_Q \circ \tilde\gamma = \gamma$.

Expresiones locales:

Si (q^i) es un sistema local de Q en un entorno de $\gamma(t_0)$, entonces $\gamma = (\gamma^1, \ldots, \gamma^n)$, con $\gamma^i = q^i \circ \gamma$. Si (q^i, v^i) es el sistema local en $\mathrm{T}Q$, entonces $\tilde\gamma$ está dada por $\tilde\gamma = (\gamma^1, \ldots, \gamma^n, \dot\gamma^1, \ldots, \dot\gamma^n)$, donde $\dot\gamma^i = \dfrac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}$.

El vector tangente a $\tilde\gamma$ en $\tilde\gamma(t_0)$ está dado por $\mathrm{T}_{t_0}\tilde\gamma \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, y si $f\colon \mathrm{T}Q \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, se tiene que

$$\left(\mathrm{T}_{t_0}\tilde\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t_0} f \circ \tilde\gamma$$

con lo que

$$\left(\mathrm{T}_{t_0}\tilde\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) q^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t_0} q^i \circ \tilde\gamma = \dot\gamma^i(t_0)$$

$$\left(\mathrm{T}_{t_0}\tilde\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) v^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t_0} v^i \circ \tilde\gamma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t_0} \dot\gamma^i = \ddot\gamma^i(t_0)$$

esto es

$$\mathrm{T}_{t_0}\tilde\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dot\gamma^i(t_0) \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{\tilde\gamma(t_0)} + \ddot\gamma^i(t_0) \frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{\tilde\gamma(t_0)}$$

Es obvio que no toda curva en $\mathrm{T}Q$ es el levantamiento canónico de una curva en la base Q. Entonces:

Definición 22 *Una curva diferenciable $\sigma\colon (a,b \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{T}Q$ es una* curva holónoma *si $\exists \gamma\colon (a,b \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow Q$ (curva diferenciable) tal que $\sigma = \tilde\gamma$.*

En coordenadas naturales, $\sigma(t) = (q^i(t), v^i(t))$, es una subida canónica si, y sólo si, $v^i(t) = \dot q^i(t)$.

En particular, las curvas holónomas pueden ser caracterizadas de manera más precisa introduciendo previamente el siguiente concepto:

Definición 23 *Sea $\sigma\colon (a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{T}Q$ una curva diferenciable en $\mathrm{T}Q$. Entonces $\tau_Q \circ \sigma\colon (a,b) \longrightarrow Q$ es una curva diferenciable en Q, que se denomina* curva en la base*.*

Y se tiene que:

Proposición 15 *Una curva diferenciable* $\sigma\colon (a,b \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{T}Q$ *es holónoma si, y sólo si,* $(\widetilde{\tau_Q \circ \sigma}) = \sigma$.

(*Dem.*) $(\Longrightarrow)$ Si σ es holónoma, $\exists\gamma\colon (a,b \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow Q$ diferenciable tal que $\sigma = \tilde{\gamma}$; entonces

$$\tau_Q \circ \sigma = \tau_Q \circ \tilde{\gamma} = \gamma \quad \Longrightarrow \quad (\widetilde{\tau_Q \circ \sigma}) = \tilde{\gamma} = \sigma$$

$(\Longleftarrow)$ Inmediato. ■

Finalmente se tiene el siguiente resultado fundamental:

Proposición 16 *1. Sea* $\varphi\colon Q \longrightarrow Q$ *un difeomorfismo y* $\mathrm{T}\varphi\colon \mathrm{T}Q \longrightarrow \mathrm{T}Q$ *su levantamiento canónico a* $\mathrm{T}Q$*. Entonces*

$$(\mathrm{T}\varphi)^*J = J \quad , \quad (\mathrm{T}\varphi)_*\Delta = \Delta$$

2. Sea $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ *y* $Z^C \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ *su levantamiento canónico a* $\mathrm{T}Q$*. Entonces el endomorfismo canónico* J *y el campo de Liouville* Δ *son invariantes por los grupos uniparamétricos de difeomorfismos locales generados por el flujo de* Z^C*.*

(*Proof*)

- El resultado para J es consecuencia directa de las expresiones locales de J y $\mathrm{T}\varphi$.

  El resultado para Δ es consecuencia directa de que $\mathrm{T}\varphi \circ F_t^\Delta = F_t^\Delta \circ \mathrm{T}\varphi$, donde F_t^Δ es un elemento del grupo uniparamétrico de difeomorfismos locales generados por el flujo de.Δ
- Inmediato a partir del resultado anterior, tomando los grupos uniparamétricos de difeomorfismos locales generados por los flujos de Z y Z^C.

■

Esto significa que los levantamientocs canónicos de difeomorfismos y campos vectoriales al fibrado tangente preservan las estructuras canónicas de dicho fibrado.

2.1.6 Ecuaciones diferenciales de segundo orden (E.D.S.O.)

Definición 24 *Un campo vectorial* $X \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ *es una* ecuacion diferencial de segundo orden (E.D.S.O.) *o también un* campo holónomo *si sus curvas integrales son curvas holónomas.*

En primer lugar, se va a dar una interpretación local de esta definición:

Proposición 17 *La condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial* $X \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ *sea una E.D.S.O. es que su expresión local en cualquier sistema natural de coordenadas en* $\mathrm{T}Q$ *sea*

$$X = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + g^i \frac{\partial}{\partial v^i} \tag{12}$$

esto es, $X_{(x,v)} = (v^i, g^i(x,v))$, $\forall (x,v) \equiv (q^i, v^i) \in \mathrm{T}Q$.

(*Dem.*) $(\Rightarrow)$ En coordenadas naturales, la expresión general de $X \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ es $X = f^i \dfrac{\partial}{\partial q^i} + g^i \dfrac{\partial}{\partial v^i}$. Sea $\sigma\colon (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{T}Q$, con $\sigma(t) = (q^i(t), v^i(t))$, una curva integral de X, entonces se satisface que

$$\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = (f^i \circ \sigma)(t) = f^i(q^j(t), v^j(t)) \quad , \quad \frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} = (g^i \circ \sigma)(t) = g^i(q^j(t), v^j(t)) \tag{13}$$

Por otra parte, si X es una E.D.S.O., por definición $\exists\gamma\colon (a,b)\subset\mathbb{R}\longrightarrow Q$, con $\gamma(t)=(q^i(t))$, tal que $\sigma=\tilde{\gamma}$; es decir, $\sigma(t)=(q^i(t),\dot{q}^i(t))$. De ahí se tiene que $\dot{q}^i(t)=v^i(t)$, $\forall i=1,\ldots,n$; con lo que, yendo al primer grupo de ecuaciones (13), resulta

$$v^i(t)=\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t}=f^i(q^j(t),v^j(t)) \quad , \quad \forall t\in(a,b)$$

y de ahí el resultado.

($\Leftarrow$) Si $X=v^i\dfrac{\partial}{\partial q^i}+g^i\dfrac{\partial}{\partial v^i}$, entonces sus curvas integrales $\sigma\colon (a,b)\subset\mathbb{R}\longrightarrow \mathrm{T}Q$, con $\sigma(t)=(q^i(t),v^i(t))$, vienen determinadas por el sistema

$$\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t}=(v^i\circ\sigma)(t)=v^i(t) \quad , \quad \frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t}=(g^i\circ\sigma)(t)=g^i(q^j(t),v^j(t))$$

es decir, $\sigma(t)=(q^i(t),\dot{q}^i(t))$. Por tanto son curvas holónomas y X es una E.D.S.O. ■

Comentario:

Obsérvese que, con las condiciones expuestas, el segundo grupo de las ecuaciones (13) se expresa en la forma

$$\frac{\mathrm{d}^2q^i}{\mathrm{d}t^2}=f^i(q^j,\dot{q}^j)$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, cuya solución determina completamente las curvas integrales de X, Este hecho justifica el apelativo E.D.S.O. con el que se designa a estos campos vectoriales.

Del anterior resultado se deduce el siguiente, que es una caracterización intrínseca de la condición E.D.S.O.:

Proposición 18 *La condición necesaria y suficiente para que $X\in\mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ sea una E.D.S.O. es que*

$$J(X)=\Delta$$

(*Dem.*) ($\Rightarrow$) En coordenadas naturales, la expresión general de $X\in\mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ es $X=f^i\dfrac{\partial}{\partial q^i}+g^i\dfrac{\partial}{\partial v^i}$. Entonces

$$J(X)=f^i\frac{\partial}{\partial v^i}=v^i\frac{\partial}{\partial v^i}\equiv\Delta \quad\Longleftrightarrow\quad f^i=v^i$$

con lo que, según la proposición precedente, se obtiene el resultado. ■

Se puede dar otra caracterización intrínseca de la condición E.D.S.O. del siguiente modo: considerada la variedad $\mathrm{T}(\mathrm{T}Q)$, se tienen dos proyecciones naturales, especificadas en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{TT}Q & \xrightarrow{\mathrm{T}\tau_Q} & \mathrm{T}Q \\ \tau_{\mathrm{T}Q}\downarrow & & \downarrow\tau_Q \\ \mathrm{T}Q & \xrightarrow{\tau_Q} & Q \end{array}$$

Si se toman sistemas de coordenadas naturales en los fibrados $\mathrm{T}Q$ y $\mathrm{TT}Q$, recordando la expresión (11), $forall((x,v),Y_{(x,v)})\equiv(q^i,v^i;u^i,w^i)\in\mathrm{TT}Q$, se tiene que

$$\begin{array}{lllllll} \tau_{\mathrm{T}Q}((x,v),Y_{(x,v)}) & = & \tau_{\mathrm{T}Q}(q^i,v^i;u^i,w^i) & = & (q^i,v^i) & & \\ \mathrm{T}\tau_Q((x,v),Y_{(x,v)}) & = & \tau_{\mathrm{T}Q}(q^i,v^i;u^i,w^i) & = & (\tau_Q(q^i,v^i),\mathrm{T}_{(q^i,v^i)}\tau_Q(u^i,w^i)) & = & (q^i,u^i) \end{array}$$

Por definición, $X\in\mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ es una sección de la proyección $\tau_{\mathrm{T}Q}$; esto es, una aplicación diferenciable $X\colon \mathrm{T}Q\longrightarrow\mathrm{TT}Q$ tal que $\tau_{\mathrm{T}Q}\circ X=\mathrm{Id}_{\mathrm{T}Q}$. Entonces:

Proposición 19 *La condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ sea una E.D.S.O. es que sea una sección de la proyección $\mathrm{T}\tau_Q$; es decir, una aplicación diferenciable $X\colon \mathrm{T}Q \longrightarrow \mathrm{TT}Q$ tal que*

$$\mathrm{T}\tau_Q \circ X = \mathrm{Id}_{\mathrm{T}Q}$$

(*Dem.*) En coordenadas naturales, la expresión general de $X \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ es $X = f^i \dfrac{\partial}{\partial q^i} + g^i \dfrac{\partial}{\partial v^i}$; esto es, interpretado como aplicación, $\forall (x,v) \equiv (q^i, v^i) \in \mathrm{T}Q$, es

$$X(x,v) = X(q^i, v^i) = (q^i, v^i; f^i(x,v), g^i(x,v))$$

Por consiguiente:

$$(\mathrm{T}\tau_Q \circ X)(x,v) = (\mathrm{T}\tau_Q \circ X)(q^i, v^i) = \mathrm{T}\tau_Q(q^i, v^i; f^i(x,v), g^i(x,v)) = (q^i, f^i(x,v))$$

y como $\mathrm{Id}_{\mathrm{T}Q}(x,v) = (q`i, v^i)$, resulta que

$$(\mathrm{T}\tau_Q \circ X)(x,v) = \mathrm{Id}_{\mathrm{T}Q}(x,v) \quad \Longleftrightarrow \quad f^i = v^i$$

y de ahí el resultado. ∎

Comentario:

De ahora en adelante, cuando haya que utilizar la condición E.D.S.O para un campo $X \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$, se hará de la forma más conveniente entre las siguientes, que se ha probado que son equivalentes:

1. Las curvas integrales de X son subidas canónicas de curvas en Q.
2. La expresión de X en un sistema natural de coordenadas en $\mathrm{T}Q$, es (12).
3. $J(X) = \Delta$.
4. $\mathrm{T}\tau_Q \circ X = \mathrm{Id}_{\mathrm{T}Q}$.

2.1.7 Fibrado cotangente de una variedad

Definición 25 *Sea Q una variedad diferencial. Se denomina* fibrado cotangente *de Q al dual T^*Q del fibrado tangente $\mathrm{T}Q$; es decir, $\mathrm{T}^*Q := \bigcup_{x \in Q} \mathrm{T}^*_x Q$.*

Se designará por $\pi_Q\colon \mathrm{T}^*Q \longrightarrow Q$ a la proyección natural.

Todo punto $m \in \mathrm{T}^*Q$ es, pues, una pareja (x, ξ) donde $x = \pi_Q(m) \in Q$ y $\xi \in \mathrm{T}^*_x Q$ (es una forma lineal sobre $\mathrm{T}_x Q$).

Proposición 20 *Sea Q una variedad diferencial n-dimensional. El fibrado cotangente T^*Q es una variedad diferencial de dimensión $2n$, cuya estructura está inducida por la de Q. Además, la proyección natural π_Q es una submersión.*

(*Dem.*) Si $\mathcal{A} = \{(U; x^i)\}$ un atlas de cartas locales en Q, entonces el atlas inducido $\mathrm{T}^*\mathcal{A} = \{(\mathrm{T}^*U; q^i, p_i)\}$ se construye de la siguiente manera:

1. $\mathrm{T}^*U := \pi_Q^{-1}(U)$.
2. $q^i(m) := x^i \circ \pi_Q(m)$, $\forall m \in \mathrm{T}^*Q$ [8].

[8] En adelante, se cometerá un abuso de notación y se idicarán por q^i indistintamente las coordenadas q^i y x^i.

3. $\forall m \in \mathrm{T}^*Q$, $m=(x,\xi)$. Entonces se tiene que
$$p_i(m) := \left\langle \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_x, \xi \right\rangle$$
es decir, $p_i(m)$ son las componentes de la 1-forma lineal ξ en la base natural $\mathrm{d}q^i\mid_x$ de T^*_xM; esto es, $\xi = p_i(m)\mathrm{d}q^i\mid_x$.

Si (q^i) y $(\bar{q}^i)$ son dos sistemas locales de coordenadas en $U\subset Q$, y $\bar{q}^j = \phi^j(q^i)$, entonces la relación entre (p_i) y $(\bar{p}_i)$ es la siguiente, sea $m=(x,\xi)\in \mathrm{T}^*Q$,
$$p_i(x,\xi) = \left\langle \frac{\partial}{\partial q^i},\xi\right\rangle = \left\langle \frac{\partial \phi^j}{\partial q^i}\Big|_x \frac{\partial}{\partial \bar{q}^j},\xi\right\rangle = \frac{\partial \phi^j}{\partial q^i}\Big|_x \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{q}^j},\xi\right\rangle = \frac{\partial \phi^j}{\partial q^i}\Big|_x \bar{p}_j(x,\xi)$$
esto es, $p_i = \dfrac{\partial \phi^j}{\partial q^i}\bar{p}_j$. De ahí, los cambios de coordenadas en T^*Q, de (q^i,p_i) a $(\bar{q}^i,\bar{p}_i)$, tienen como matriz jacobiana
$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\phi^j}{\partial q^i}\right) & 0 \\ \left(\frac{\partial^2\phi^j}{\partial q^k\partial q^i}\right)^{-1} p_i & \left(\frac{\partial\phi^j}{\partial q^i}\right)^{-1}\end{pmatrix}$$

Teniendo presente esta descripción local del fibrado cotangente, es evidente que su dimensión es $2n$, dado que se ha doblado el número de coordenadas en relación a las de Q. ■

Definición 26 *Las cartas anteriores se denominan* cartas naturales *del fibrado cotangente y sus elementos* coordenadas naturales *(*q^i *son las* coordenadas en la base *y* p_i *las* coordenadas en las fibras*).*

2.1.8 Formas canónicas en el fibrado cotangente

Una de las características esenciales del fibrado cotangente es la siguiente:

Teorema 5 *En* T^*Q *hay definida canónicamente una* 2*-forma diferenciable que es cerrada y no degenerada* [9]*.*

(*Dem.*) Según se ha visto en la demostración de la proposición anterior,
$$\mathrm{T}^*Q := \{m=(x,\xi)\ \mid\ x\in Q\ ,\ \xi\in \mathrm{T}^*_xQ\}$$
Puesto que T^*Q es una variedad diferencial, se puede construir su fibrado tangente TT^*Q y la aplicación tangente inducida por $\pi_Q\colon \mathrm{T}^*Q \longrightarrow Q$, que debe ser entendida como una aplicación fibra a fibra $\mathrm{T}_{(x,\xi)}\pi_Q\colon \mathrm{T}_{(x,\xi)}\mathrm{T}^*Q \longrightarrow \mathrm{T}_xQ$.

Usando únicamente la proyección del fibrado se va a demostrar el teorema, procediendo constructivamente:

1. Se construye la 1-forma diferencial $\Theta\in\Omega^1(\mathrm{T}^*Q)$ de la siguiente manera: en cada punto $m=(x,\xi)\in \mathrm{T}^*Q$, $\forall X_m\in \mathrm{T}_m\mathrm{T}^*Q$,
$$\Theta_m(X_m) := \xi(\mathrm{T}_m\pi_Q(X_m))$$
Su expresión en una carta natural de T^*Q se obtiene del siguiente modo: tal como se ha discutido en la proposición anterior, $\xi = p_i(m)\mathrm{d}q^i\mid_x$; por otra parte, $\forall X_m\in \mathrm{T}_m(\mathrm{T}^*Q)$, se tiene la expresión local $X_m = A^j\dfrac{\partial}{\partial q^j}\Big|_m + B_j\dfrac{\partial}{\partial p_j}\Big|_m$ y, finalmente, la expresión general de Θ_m es $\Theta_m = a_i\mathrm{d}q^i\mid_m + b^i\mathrm{d}p_i\mid_m$, entonces
$$\Theta_m(X_m) = a_iA^i + b^iB_i$$

[9] Usando la terminología que se introducirá en la sección 3.1.1, se dice que T^*Q es una variedad simpléctica.

por otra parte, de la definición

$$\begin{aligned}\Theta_m(X_m) &:= \xi(\mathrm{T}_m\pi_Q(X_m)) = (p_i(m)\mathrm{d}q^i\,|_x)\left[\mathrm{T}_m\pi_Q(A^j\frac{\partial}{\partial q^j}\Big|_m + B_j\frac{\partial}{\partial p_j}\Big|_m)\right] \\ &= (p_i(m)\mathrm{d}q^i\,|_x)\left(A^j\frac{\partial}{\partial q^j}\Big|_x\right) = p_i(m)A^j\delta^i_j = p_i(m)A^i\end{aligned}$$

y como ésto es válido $\forall X_m$ (esto es, $\forall A^i, B_i$), igualando ambas expresiones se llega a que $a_i = p_i(m)$ y $b^i = 0$, es decir, la expresión local de Θ en una carta natural de T^*Q es

$$\Theta = p_i\mathrm{d}q^i$$

2. Se define la 2-forma diferencial

$$\Omega := -\mathrm{d}\Theta$$

cuya expresión en una carta natural del fibrado cotangente es obviamente

$$\Omega = \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i$$

Es evidente que Ω es cerrada (por ser exacta) y es no degenerada (como se deduce de su expresión en coordenadas). ■

Definición 27 *Las formas $\Theta \in \mathit{\Omega}^1(\mathrm{T}^*Q)$ y $\Omega \in \mathit{\Omega}^2(\mathrm{T}^*Q)$ construidas en el teorema anterior se denominan respectivamente* 1 y 2 forma canónica *del fibrado cotangente.*

Proposición 21 *El fibrado cotangente de una variedad diferencial es una variedad* orientada *y* orientable*.*

(*Dem.*) A partir de la 2-forma canónica se puede definir la forma de volumen (también canónica) $\Omega^n := \wedge^n\Omega \in \mathit{\Omega}^{2n}(M)$. ■

2.1.9 Levantamientos canónicos al fibrado cotangente

En uno de los capítulos anteriores se explicó que había una manera natural (canónica) de *levantar* los difeomorfismos y los campos vectoriales en una variedad diferencial a su fibrado tangente. Vamos a ver que también esto es posible en el fibrado cotangente.

Definición 28 *Sea Q una variedad diferencial y un difeomorfismo*

$$\begin{array}{cccc}\varphi & : & Q & \longrightarrow & Q \\ & & x & \mapsto & \varphi(x)\end{array}$$

Se denomina levantamiento canónico *de φ a T^*Q al difeomorfismo*

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{T}^*\varphi & : & \mathrm{T}^*Q & \longrightarrow & \mathrm{T}^*Q \\ & & (\varphi(x),\xi) & \mapsto & (x,\mathrm{T}^*\varphi(\xi))\end{array}$$

donde $\mathrm{T}^*\varphi(\xi)$ está definido por dualidad, esto es, si

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{T}\varphi & : & \mathrm{T}Q & \longrightarrow & \mathrm{T}Q \\ & & (x,v) & \mapsto & (x,\mathrm{T}\varphi(v))\end{array}$$

entonces, para todo $v \in \mathrm{T}_xQ$,

$$(\mathrm{T}^*\varphi(\xi))(v) := \xi(\mathrm{T}\varphi(v))$$

Las siguientes propiedades son inmediatas a partir de la definición:

Proposición 22 *Sea Q una variedad diferencial.*

1. $\varphi \circ \pi_Q \circ \mathrm{T}^*\varphi = \pi_Q$, *para todo difeomorfismo* $\varphi\colon Q \longrightarrow Q$.
2. $\mathrm{T}^*(\varphi \circ \phi) = \mathrm{T}^*\phi \circ \mathrm{T}^*\varphi$, *para todo par de difeomorfismos* $\varphi, \phi\colon Q \longrightarrow Q$.

Un resultado de especial relevancia es:

Proposición 23 *Sea Q una variedad diferencial, $\varphi\colon Q \longrightarrow Q$ un difeomorfismo y $\mathrm{T}^*\varphi$ su levantamiento canónico a T^*Q. Entonces $(\mathrm{T}^*\varphi)^*\Theta = \Theta$ y, por tanto, también $(\mathrm{T}^*\varphi)^*\Omega = \Omega$* [10].

(*Dem.*) Para todo $(x, \mathrm{T}^*\varphi(\xi)) \in \mathrm{T}^*Q$ y $V \in \mathrm{T}_{(\varphi(x),\xi)}(\mathrm{T}^*Q)$, usando la definición de Θ se tiene

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}^*\varphi)^*\Theta_{(x,\mathrm{T}^*\varphi(\xi))}(V) &= \Theta_{(x,\mathrm{T}^*\varphi(\xi))}(\mathrm{T}\mathrm{T}^*\varphi(V)) = (\mathrm{T}^*\varphi(\xi))(\mathrm{T}\pi_Q(\mathrm{T}\mathrm{T}^*\varphi(V))) = (\mathrm{T}^*\varphi(\xi))(\mathrm{T}(\pi_Q \circ \mathrm{T}^*\varphi)(V)) \\ &= \xi(\mathrm{T}\varphi(\mathrm{T}(\pi_Q \circ \mathrm{T}^*\varphi)(V))) = \xi(\mathrm{T}(\varphi \circ \pi_Q \circ \mathrm{T}^*\varphi)(V))) = \xi(\mathrm{T}\pi_Q(V)) = \Theta_{(\varphi(x),\xi)}(V)\end{aligned}$$

donde también se ha usado la primera de las propiedades anteriores.

El resultado para Ω es inmediato a partir de éste. ■

Utilizando la definición de levantamiento canónico de difeomorfismos, se obtiene la siguiente:

Definición 29 *Sea Q una variedad diferencial y $Z \in \mathfrak{X}(Q)$. Se denomina* levantamiento canónico *de Z a T^*Q al campo vectorial $Z^* \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}^*Q)$ cuyos grupos uniparamétricos locales de difeomorfismos son los levantamientos canónicos T^*F_t de los grupos uniparamétricos locales de difeomorfismos F_t de Z.*

Como consecuencia directa de la definición y del teorema de existencia y unicidad de grupos uniparamétricos locales de difeomorfismos se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 24 *Sea Q una variedad diferencial, $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ y $Z^* \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}^*Q)$ su levantamiento canónico. Entonces Z^* es π_Q-proyectable y $\mathrm{T}\pi_Q(Z^*_m) = Z_x$, para todo $m \equiv (x,\xi) \in \mathrm{T}^*Q$.*

Todo campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ induce una función $F_Z \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}^*Q)$

$$\begin{array}{cccc} F_Z & : & \mathrm{T}^*Q & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & m \equiv (x,\xi) & \mapsto & \xi(Z_x) \end{array}$$

Teniendo en cuenta la definición de la 1-forma canónica Θ de T^*Q y la proposición 24 se tiene que, para todo $m \equiv (x,\xi) \in \mathrm{T}^*Q$,

$$F_Z(m) \equiv F_Z(x,\xi) = \xi(Z_x) = \xi(\mathrm{T}\pi_Q(Z^*_m)) = \Theta_m(Z^*_m)$$

es decir, se ha probado que:

Proposición 25 *Sea Q una variedad diferencial y $Z \in \mathfrak{X}(Q)$. Entonces su levantamiento canónico $Z^* \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}^*Q)$ verifica que $F_Z = \Theta(Z^*)$.*

Teniendo ésto en cuenta, el levantamiento canónico de un campo vectorial en Q al fibrado cotangente puede caracterizarse de manera equivalente como:

Proposición 26 *Sea Q una variedad diferencial y $Z \in \mathfrak{X}(Q)$. El levantamiento canónico de Z a T^*Q es el único campo vectorial $Z^* \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}^*Q)$ tal que $i(Z^*)\Omega = \mathrm{d}F_Z$* [11].

[10] Con la nomenclatura que introduciremos en la sección 3.1.5, se dirá que $\mathrm{T}^*\varphi$ es un *simplectomorfismo*.

[11] Esto es, con la terminología de la sección 3.1.2, Z^* es el campo hamiltoniano (global) que tiene por función hamiltoniana F_Z.

(*Dem.*) En efecto, basta utilizar la fórmula de Cartan y tener en cuenta la proposición 23

$$i(Z^*)\Omega = -\,i(Z^*)\mathrm{d}\Theta = \mathrm{d}\,i(Z^*)\Theta - \mathrm{L}(Z^*)\Theta = \mathrm{d}(\Theta(Z^*)) = \mathrm{d}F_Z$$

ya que, al ser los grupos uniparamétricos locales de difeomorfismos de Z^* levantamientos canónicos, de acuerdo con la proposición 23, dejan invariantes las formas canónicas y, de ahí, $\mathrm{L}(Z^*)\Theta = 0$. ■

Expresión local:

Con esta caracterización es fácil obtener la expresión local de Z^* en una carta de coordenadas canónicas $(U; q^i, p_i)$ de T^*Q. Así, si

$$Z|_{\pi_Q(U)} = f^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i}$$

resulta que $F_Z(q^i, p_i) = p_i f^i(q^j)$, luego

$$Z^*|_U = f^i\frac{\partial}{\partial q^i} - p_j\frac{\partial f^j}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

Finalmente, como consecuencia directa de la proposición 23 se tiene que:

Proposición 27 *Sea* $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ *y* $Z^{C*} \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}^*Q)$ *su levantamiento canónico a* T^*Q*. Entonces*

$$\mathrm{L}(Z^{C*})\theta_A = 0 \quad , \quad \mathrm{L}(Z^{C*})\omega_A = 0$$

(*Dem.*) Basta tomar los grupos uniparamétricos locals de difeomorfismos generados por el flujo de Z y sus levantamientos canónicos. ■

2.1.10 Derivada fibrada de una función

Sea $F \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}Q)$. Dado un punto $x \in Q$, se considera la función $F_x \colon \mathrm{T}_xQ \longrightarrow \mathbb{R}$, restricción de F a la fibra T_xQ. Por ser F de clase C^∞, también lo es F_x. Si $(x,u) \in \mathrm{T}Q$, se puede tomar la diferencial de F_x en ese punto, que será un elemento de T^*_xQ. Se tiene así $\mathrm{D}_{(x,u)}F_x \in \mathrm{T}^*_xQ$, asociado al punto$(x,u)$. Entonces:

Definición 30 *Se denomina* derivada fibrada *de* F *a la aplicación*

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}F & : & \mathrm{T}Q & \longrightarrow & \mathrm{T}^*Q \\ & & (x,u) & \mapsto & (x, \mathrm{D}F_x(u)) \end{array}$$

Obsérvese que $\pi_Q \circ \mathcal{F}F = \tau_Q$, es decir que $\mathcal{F}F$ conserva las fibras.

Expresiones locales:

Considérese una carta natural $(U; q^i, v^i)$ de $\mathrm{T}Q$ y el correspondiente sistema canónico de coordenadas $(U; q^i, p_i)$ en T^*Q. Obsérvese que una base de T_xQ es $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial q^i}\Big|_x \right\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, y las coordenadas en T_xQ son $(v^1, \ldots, v^n)$. De ahí, la matriz jacobiana de $\mathrm{D}_{(x,u)}F_x$ es

$$\left(\frac{\partial F}{\partial v^1}\Big|_{(x,u)} \cdots \frac{\partial F}{\partial v^n}\Big|_{(x,u)} \right)$$

y si $v = \lambda^i \dfrac{\partial}{\partial q^i}\Big|_x \in \mathrm{T}_xQ$, entonces se tiene que

$$(\mathrm{D}_{(x,u)}F_x)(v) = \left(\frac{\partial F}{\partial v^1}\Big|_{(x,u)} \cdots \frac{\partial F}{\partial v^n}\Big|_{(x,u)} \right) \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{pmatrix}$$

de donde
$$\mathcal{F}F(x,u) = \left(x, \frac{\partial F}{\partial v^i}\Big|_{(x,u)} \mathrm{d}q^i\Big|_x \right)$$
esto es, la expresión en coordenadas de $\mathcal{F}F$ es
$$q^i \circ \mathcal{F}F = q^i \quad , \quad p_i \circ \mathcal{F}F = \frac{\partial F}{\partial v^i} \quad ; \quad i = 1, \ldots, n$$

2.2 Formalismo lagrangiano de sistemas dinámicos lagrangianos

Comenzaremos describiendo el denominado *formalismo lagrangiano* de los sistemas dinámicos lagrangianos; previa definición de lo que se entiende por un sistema de este tipo.

2.2.1 Sistemas dinámicos lagrangianos

En la sección 1 se ha visto que un sistema mecánico Newtoniano (independiente del tiempo) estaba descrito por una terna (M, g, ω), donde:

- (M, g) es una variedad (de Riemann) donde tiene lugar el movimiento, que suele denominarse *espacio de configuración* del sistema, y cuyos puntos describen las *posiciones* de las partículas que forman el sistema.
- ω (o equivalentemente F) es un elemento geométrico que contiene la información dinámica.

Las trayectorias dinámicas, solución de las ecuaciones de Newton, son curvas en $\mathrm{T}M$ que son levantamientos canónicos de curvas en M. Los puntos de la variedad $\mathrm{T}M$ (que son posibles condiciones iniciales de estas ecuaciones, y por tanto, representan las posibles *posiciones* y *velocidades* del sistema) son los *estados físicos* del sistema y, por ello, $\mathrm{T}M$ se suele denominar *espacio de estados o de fases (de velocidades)* del sistema.

En el caso particular de que el sistema sea conservativo, el elemento dinámico puede sustituirse por la *función lagrangiana* (de tipo mecánico) $\mathcal{L} \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}M)$, y las ecuaciones dinámicas (escritas en una carta local de coordenadas naturales en $\mathrm{T}M$) son las *ecuaciones de Euler-Lagrange (de primera especie)*.

Finalmente, si los grados de libertad del sistema tiene algún tipo de restricción, es decir, la dinámica tiene lugar en una subvariedad $j \colon S \hookrightarrow M$, todo es igual, pero considerando $(S, j^*g, j^*\omega)$ como sistema Newtoniano. Obsérvese que, en este caso, el espacio de configuración es S y el correspondiente espacio de fases (de velocidades) es $\mathrm{T}S$.

Estos son esencialmente los datos fundamentales en que se va a basar la formulación lagrangiana de los sistemas dinámicos autónomos. Así pues, los fundamentos de dicha formulación son los siguientes:

- En un sistema físico lagrangiano, los n posibles grados de libertad del sistema están descritos por el dominio de variación de un conjunto de n *coordenadas generalizadas* (de "posición") [12], que determinan locálmente el *espacio de configuración* del sistema.

  Los *estados* del sistema van a ser descritos localmente por medio de coordenadas de posición generalizadas y sus correspondientes velocidades generalizadas.

  Geométricamente, ésto se traduce asumiendo:

  Postulado 2 (Primer postulado del formalismo lagrangiano)*:*

  El espacio de configuración Q de un sistema dinámico con n grados de libertad tiene estructura de variedad diferencial n-dimensional.

[12] Puede tratarse de un sistema mecánico, en cuyo caso las coordenadas generalizadas corresponden a grados de libertad de tipo "mecánico" (p. ej., coordenadas de posición), o de un sistema físico de cualquier otra clase, p. ej., eléctrico o termodinámico, en cuyo caso las coordenadas generalizadas corresponden a magnitudes físicas de otro tipo (como pueden ser diferencias de potencial, temperaturas, etc.).

El espacio de estados es el fibrado tangente $\mathrm{T}Q$ *de la variedad* Q *que constuye el espacio de configuración del sistema. Dicho espacio de estados recibe el nombre de* espacio de estados *o* de fases de posiciones-velocidades *del sistema.*

- **Postulado 3** (Segundo postulado del formalismo lagrangiano)*:*

  Los observables o magnitudes físicas de un sistema dinámico son funciones de $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}Q)$*.*

  El resultado de una medida de un observable es el valor que toma la función que lo representa en un punto del espacio de estados $\mathrm{T}Q$ *(es decir, en un estado determinado, según el primer postulado).*

- **Postulado 4** (Tercer postulado del formalismo lagrangiano)*:*

  Se da una función $\mathcal{L} \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}Q)$*, que se denomina* función lagrangiana*, la cual es depositaria de toda la información dinámica del sistema.*

  A partir de ella, y utilizando las estructuras geométricas propias del fibrado tangente, se construyen la forma $\Omega_{\mathcal{L}} \in \mathit{\Omega}^2(\mathrm{T}Q)$, y la denominada *función Energía lagrangiana* $E_{\mathcal{L}} \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}Q)$, con las cuales se establecerán las ecuaciones dinámicas del sistema.

Teniendo en cuenta todo esto, se define:

Definición 31 *Se denomina* sistema dinámico lagrangiano *a toda pareja* $(\mathrm{T}Q, \mathcal{L})$*, donde* Q *representa el espacio de configuración de un sistema físico y* $\mathcal{L} \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}Q)$ *es la función lagrangiana del sistema.*

> **Comentario**: Es importante reseñar que los sitemas dinámicos que se van a describir de este modo son *autónomos*; es decir, *independientes del tiempo*. (Para la descripción geométrica de sistemas *no autónomos* véase, p. ej., [5], [10], ETC.).
>
> También se trata de sistemas *de primer orden*, denominación que reciben los sistemas físicos cuya lagrangiana depende de las coordenadas de posición y velocidad, en contraposición a aquellos en los que dicha dependencia alcanza a las *aceleraciones generalizadas* o, en general, derivadas temporales de orden superior de las posiciones generalizadas. (Para el tratamiento geométrico de sistemas *de orden superior* véase, p. ej., [11], [7], ETC.).

Seguidamente vamos a ver cómo se construyen, a partir de la lagrangiana, las estructuras dinámico-geométricas que permitan escribir intrínsecamente las ecuaciones dinámicas; utilizando para ello las estructuras geométricas del fibrado tangente que fueron introducidas en el apartado 2.1.

2.2.2 Estructuras geométricas inducidas por la dinámica

En el fibrado tangente se tienen como estructuras geométricas fundamentales el endomorfismo vertical $J \colon \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q) \longrightarrow \mathfrak{X}^V(\mathrm{T}Q)$ y el campo de Liouville $\Delta \in \mathfrak{X}^V(\mathrm{T}Q)$. Dada una función lagrangiana $\mathcal{L} \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}Q)$, con la ayuda de estas estructuras se pueden contruir los siguientes elementos:

Definición 32 *Se denomina* 1-forma lagrangiana *asociada a* $\mathcal{L}$ *a*

$$\Theta_{\mathcal{L}} := i(J)\mathrm{d}\mathcal{L} = \mathrm{d}\mathcal{L} \circ J \in \mathit{\Omega}^1(\mathrm{T}Q)$$

Se denomina 2-forma lagrangiana *asociada a* $\mathcal{L}$ *a*

$$\Omega_{\mathcal{L}} := -\mathrm{d}\Theta_{\mathcal{L}} \in \mathit{\Omega}^2(\mathrm{T}Q)$$

Definición 33 *Se denomina* acción *asociada a* $\mathcal{L}$ *a la función*

$$A_{\mathcal{L}} := \Delta(\mathcal{L}) \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}Q)$$

Se denomina Energía lagrangiana *asociada a* $\mathcal{L}$ *a la función*

$$E_{\mathcal{L}} := A_{\mathcal{L}} - \mathcal{L} \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}Q)$$

Comentarios:

- La energía lagrangiana recibe este nombre porque el observable físico que representa es precisamente la energía.
- Hay funciones lagrangianas que, siendo distintas, dan lugar a las mismas $\Omega_{\mathcal{L}}$ y $E_{\mathcal{L}}$. Se denominan *lagrangianas equivalentes gauge* (ver sección 4.2.3).
- Es importante puntualizar que, dada una función cualquiera $\mathcal{L} \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}Q)$, la forma $\Omega_{\mathcal{L}}$ no tiene necesariamente rango constante en $\mathrm{T}Q$. Cuando dicho rango sea constante, se dirá que la lagrangiana en cuestión es *geométricamente admisible*. La teoría que vamos a desarrollar concierne sólo a sistemas lagrangianos para los cuales dicho rango sí es constante [13].

Expresiones locales:

Considérese una carta natural $(U; q^i, v^i)$ de $\mathrm{T}Q$. Recordemos que, referidas a ella, la expresión del endomorfismo vertical y del campo de Liouville son

$$J\mid_U = \mathrm{d}q^i \otimes \frac{\partial}{\partial v^i} \quad , \quad \Delta\mid_U = v^i \frac{\partial}{\partial v^i}$$

y $\mathcal{L}\mid_U := \mathcal{L}(q^i, v^i)$.

Las expresiones locales de la acción asociada a la lagrangiana $\mathcal{L}$ son, entonces,

$$A_{\mathcal{L}}\mid_U = v^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} \quad , \quad E_{\mathcal{L}}\mid_U = v^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} - \mathcal{L}$$

Para obtener las expresiones locales de las formas lagrangianas, escribamos la expresión más general para una 1-forma en $\mathrm{T}Q$

$$\Theta_{\mathcal{L}}\mid_U = a_i(q^j, v^j)\mathrm{d}q^i + b_i(q^j, v^j)\mathrm{d}v^i$$

entonces, $\forall Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ se tiene

$$Y\mid_U = A^i(q^j, v^j)\frac{\partial}{\partial q^i} + B^i(q^j, v^j)\frac{\partial}{\partial v^i}$$

de modo que

$$\Theta_{\mathcal{L}}(Y)\mid_U = a_i A^i + b_i B^i$$

y, por otra parte, por definición

$$\Theta_{\mathcal{L}}(Y)\mid_U := (\mathrm{d}\mathcal{L} \circ J)(Y)\mid_U == \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}\mathrm{d}v^i\right)\left(A^i \frac{\partial}{\partial v^i}\right) = A^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}$$

de donde, comparando ambas expresiones se tiene que $a_i = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}$ y $b_i = 0$; es decir que

$$\Theta_{\mathcal{L}}\mid_U = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}\mathrm{d}q^i$$

De aquí se obtiene de inmediato que

$$\Omega_{\mathcal{L}}\mid_U = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^j \partial v^i}\mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}q^j + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^j \partial v^i}\mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}v^j$$

Es importante reseñar que, dada una función cualquiera $\mathcal{L} \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}Q)$, aunque la 2-forma lagrangiana $\Omega_{\mathcal{L}}$ siempre es cerrada, no es necesariamente no degenerada (ya que, como se deduce inmediatamente a partir de estas expresiones locales, su rango depende exclusivamente de las derivadas segundas de la función $\mathcal{L}$). Entonces:

[13] Cuando esto no es así, se puede formular una teoría más general usando *variedades de Poisson*. (ver [12]).

Definición 34 $\mathcal{L} \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}Q)$ *es una función lagrangiana* regular *(y* $(\mathrm{T}Q, \mathcal{L})$ *es entonces un* sistema dinámico lagrangiano regular*) si la* 2*-forma lagrangiana* $\Omega_{\mathcal{L}}$ *es no degenerada. En caso contrario,* $\mathcal{L}$ *es una lagrangiana* singular *(y* $(\mathrm{T}Q, \mathcal{L})$ *un* sistema dinámico lagrangiano singular*)* [14]

La no degeneración de la 2-forma lagrangiana puede interpretarse en términos locales de la siguiente manera:

Proposición 28 *Sea* $(\mathrm{T}Q, \mathcal{L})$ *un sistema dinámico lagrangiano.* $\mathcal{L}$ *es una lagrangiana regular si, y sólo si, en una carta natural cualquiera* $(U; q^i, v^i)$ *de* $\mathrm{T}Q$*, la matriz hessiana* $H_{\mathcal{L}} := \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^j \partial v^i}\right)$ *es regular en todos los puntos de* U*.*

(*Dem.*) Hay que demostrar que $\Omega_{\mathcal{L}}$ es no degenerada si, y sólo si, se cumple esa condición. Para ello basta tener en cuenta que $\Omega_{\mathcal{L}} \in \Omega^2(\mathrm{T}Q)$ es no degenerada si, y sólo si, $\Omega_{\mathcal{L}}^n$ es una forma de volumen en $\mathrm{T}Q$, entonces

$$\Omega_{\mathcal{L}}^n \mid_U = n! \det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^j \partial v^i}\right)^n \mathrm{d}q^1 \wedge \ldots \mathrm{d}q^n \wedge \mathrm{d}v^1 \wedge \ldots \mathrm{d}v^n$$

que es una forma no nula en todos los puntos siempre que $\det \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^j \partial v^i}\right) \neq 0$ en todos los puntos. ∎

Comentario:

Obsérvese que las funciones lagrangianas *de tipo mecánico* (que aparecen en la sección 1)

$$\mathcal{L} := K - \tau_Q^* V \equiv \frac{1}{2} g_{ij}(q) v^i v^j - V(q)$$

son siempre regulares, ya que

$$\Omega_{\mathcal{L}} \equiv g_{ij}(q) \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}v^j$$

2.2.3 Ecuaciones dinámicas lagrangianas. Ecuaciones de Euler-Lagrange

La ecuación dinámica en el formalismo lagrangiano viene establecida por el siguiente:

Postulado 5 (Cuarto postulado del formalismo lagrangiano)*:*

Las trayectorias dinámicas de un sistema lagrangiano $(\mathrm{T}Q, \mathcal{L})$ *son las curvas integrales de un campo vectorial* $X_{\mathcal{L}} \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ *tal que:*

1. $X_{\mathcal{L}}$ *es solución de la ecuación*
$$i(X_{\mathcal{L}})\Omega_{\mathcal{L}} = \mathrm{d}E_{\mathcal{L}} \tag{14}$$
2. $X_{\mathcal{L}}$ *es una E.D.S.O., esto es, satisface que*
$$J(X_{\mathcal{L}}) = \Delta \tag{15}$$

Las ecuaciones (14) son las denominadas ecuaciones lagrangianas del movimiento *y el campo vectorial* $X_{\mathcal{L}}$ *solución (si existe) se denomina* campo dinámico lagrangiano*. Si además, cumple la condición (15), entonces se denomina* campo de Euler-Lagrange *del sistema, y sus curvas integrales (en la base) son las soluciones de las* ecuaciones de Euler-Lagrange.

[14] En esta exposición sólo vamos a estar interesados, en principio, en sistemas dinámicos lagrangianos regulares.

Comentario:

En Física es habitual requerir que las ecuaciones del movimiento puedan obtenerse a partir de un principio variacional, como se verá más adelante, y para ello es condición necesaria que las curvas integrales del campo dinámico $X_{\mathcal{L}}$ sean levantamientos de curvas integrales en la base Q del fibrado $\mathrm{T}Q$. Es por ello que se pide que $X_{\mathcal{L}}$ sea una E.D.S.O.

Definición 35 *Dado un sistema dinámico lagrangiano* $(\mathrm{T}Q, \mathcal{L})$*, se denomina* problema lagrangiano *planteado por dicho sistema a hallar un campo vectorial* $X_{\mathcal{L}} \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ *que satisfaga las condiciones (14) y (15).*

Expresiones locales:

Considérese una carta natural $(U; q^i, v^i)$ de $\mathrm{T}Q$. Teniendo en cuenta las expresiones locales de los diversos objetos que intervienen en las ecuaciones del movimiento, se obtiene inmediatamente que, si $X_{\mathcal{L}}\mid_U = A^i(q^j, v^j)\dfrac{\partial}{\partial q^i} + B^i(q^j, v^j)\dfrac{\partial}{\partial v^i}$, la ecuación (14), escrita en coordenadas es:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^j \partial v^i} B^i &= \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^j \partial v^i} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^j \partial q^i} \right) A^i - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^i \partial q^j} v^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} && (16) \\
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^j \partial v^i}(A^i - v^i) &= 0 && (17)
\end{aligned}
$$

La condición (15) es locaálmente equivalente, como ya sabemos, a que $A^i = v^i$. Además, las curvas integrales de $X_{\mathcal{L}}$, $\sigma \colon I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{T}Q$, son subidas canónicas de curvas $\gamma \colon I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow Q$, con lo que, si $\gamma(t) = (q^i(t))$, entonces $\sigma(t) = (q^i(t), \dot{q}^i(t))$ y

$$
A^i = v^i = \frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} \quad , \quad B^i = \frac{\mathrm{d}^2 q^i}{\mathrm{d}t^2}
$$

con lo que la combinación de estas expresiones y las ecuaciones (16) y (17) da la ecuación de las curvas integrales que es

$$
\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^j \partial v^i} \circ \gamma \right) \frac{\mathrm{d}^2 q^i}{\mathrm{d}t^2} = \left(-\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^j \partial q^i} \circ \gamma \right) \frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} \circ \gamma
$$

que se suele escribir abreviadamente $(H_{\mathcal{L}})_{ji}(q^k(t), \dot{q}^k(t))\dfrac{\mathrm{d}^2 q^i}{\mathrm{d}t^2} = F_j(q^k(t), \dot{q}^k(t))$, o también en su forma equivalente

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(derpar\mathcal{L}v^j \circ \gamma \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} \circ \gamma
$$

que es la expresión clásica de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Para el caso de lagrangianas regulares se tiene el siguiente resultado:

Proposición 29 *Sea* $(\mathrm{T}Q, \mathcal{L})$ *un sistema dinámico lagrangiano regular. Entonces existe un único campo vectorial* $X_{\mathcal{L}} \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ *que es solución de la ecuación lagrangiana (14), y es una E.D.S.O.*

(*Dem.*) La existencia y unicidad son consecuencia directa de que $\Omega_{\mathcal{L}}$ es no degenerada.

Por otra parte, si la lagrangiana es regular, la matriz hessiana $H_{\mathcal{L}}$ es regular y la ecuación (17) conduce a que $A^i = v^i$, con lo que el campo vectorial $X_{\mathcal{L}}$ es automáticamente una E.D.S.O. (Obsérvese que, entonces, de las ecuaciones (16) se determinan todos los coeficientes B^i). ■

Comentario:

Si el sistema lagrangiano no es regular, la ecuación (14) es, en general, incompatible y aun en el caso en que tenga solución, ésta no es única, ni es necesariamente una E.D.S.O. En efecto, si $X^0_{\mathcal{L}}$ es una solución, entonces $X^0_{\mathcal{L}} + Z$, con $Z \in \ker \Omega_{\mathcal{L}}$, es también solución. En los casos más interesantes, $X_{\mathcal{L}}$ existe sólo en alguna subvariedad $S \hookrightarrow \mathrm{T}Q$.

2.3 Formalismo hamiltoniano canónico de sistemas lagrangianos

El *formalismo hamiltoniano canónico* de la Mecánica fue introducido inicialmente, entre otros, por *Hamilton, Lagrange, Poisson, Ostrogadsky* y *Donkin*, y constituye la *formulación dual* del formalismo lagrangiano. Su construcción se basa en la introducción de una aplicación: la *derivada fibrada* de la función lagrangiana.

2.3.1 Transformación de Legendre

Definición 36 *Sea* $(\mathrm{T}Q, \mathcal{L})$ *un sistema dinámico lagrangiano. Se denomina* transformación de Legendre *asociada al sistema a la derivada fibrada de* $\mathcal{L}$*, esto es, a la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{FL} : & \mathrm{T}Q & \longrightarrow & \mathrm{T}^*Q \\ & (x,u) & \mapsto & \mathrm{D}_{(x,u)}\mathcal{L}_x \end{array}$$

Expresión local:

Dados una carta natural $(U; q^i, v^i)$ de $\mathrm{T}Q$ y el correspondiente sistema canónico de coordenadas $(\mathcal{FL}(U); q^i, p_i)$ en T^*Q, la expresión local de $\mathcal{FL}$ es

$$q^i \circ \mathcal{FL} = q^i \quad , \quad p_i \circ \mathcal{FL} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} \quad ; \quad i = 1, \ldots, n$$

Las coordenadas p_i reciben el nombre de *momentos generalizados* asociados a las coordenadas de posición q^i.

Una característica relevante de la transformación de Legendre está puesta de manifiesto por el siguiente:

Teorema 6 *Sean* Θ *y* Ω *las formas canónicas de* T^*Q*. Entonces* $\mathcal{FL}^*\Theta = \Theta_{\mathcal{L}}$ *y* $\mathcal{FL}^*\Omega = \Omega_{\mathcal{L}}$*.*

(*Dem.*) La expresión local de Θ es $\Theta = p_i \mathrm{d}q^i$, de donde

$$\mathcal{FL}^*\Theta = (\mathcal{FL}^* p_i)\mathrm{d}(q^i \circ \mathcal{FL}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}\mathrm{d}q^i = \Theta_{\mathcal{L}}$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{FL}^*$ conmuta con la diferencial exterior, se tiene el resultado para Ω. ∎

Trabajando también en coordenadas locales, es inmediato demostrar que:

Proposición 30 $\mathcal{L}$ *es una lagrangiana regular si, y sólo si,* $\mathcal{FL}$ *es un difeomorfismo local.*

(*Dem.*) dado que $\mathcal{L}$ es C^∞, la c.n.s. para que $\mathcal{FL}$ sea un difeomorfismo local es que $\mathrm{D}_p\mathcal{FL}$ sea un isomorfismo, $\forall p \in \mathrm{T}Q$. Entonces basta con estudiar la expresión local de la jacobiana de $\mathcal{FL}$ en un punto, que es justamente la matriz hessiana de $\mathcal{L}$ en dicho punto. ∎

Esto da origen a la siguiente:

Definición 37 $\mathcal{L}$ *es una* lagrangiana hiperregular *si* $\mathcal{FL}$ *es un difeomorfismo (global).*

Comentario:

Si $\mathcal{L}$ es regular (pero no hiperregular), entonces $\mathcal{FL}(\mathrm{T}Q) = U \subset \mathrm{T}^*Q$ (donde U es un abierto).
Si $\mathcal{L}$ es hiperregular, entonces $\mathcal{FL}(\mathrm{T}Q) = \mathrm{T}^*Q$

De las lagrangianas singulares, las que resultan más interesantes son:

Definición 38 $\mathcal{L}$ *es una lagrangiana* casi-regular *si:*

1. *$\mathcal{FL}(\mathrm{T}Q) \equiv P$ es una subvariedad (cerrada) de T^*Q.*
2. *$\mathcal{FL}$ es una submersión en su imagen.*
3. *Las fibras $\mathcal{FL}^{-1}(\mathcal{FL}(p))$, $\forall p \in \mathrm{T}Q$, son subvariedades conexas de $\mathrm{T}Q$.*

2.3.2 Formalismo hamiltoniano canónico y equivalencia

En primer lugar, debe observarse que mediante la transformación de Legendre, se ha pasado de trabajar en $\mathrm{T}Q$ (espacio de fases de *posiciones* y *velocidades*) a T^*Q (o un abierto o una subvariedad del mismo), lo que locálmente equivale a usar coordenadas de *posiciones* y *momentos* para describir los estados del sistema. Por ese motivo, T^*Q se denomina *espacio de estados o de fases de posiciones-momentos*.

Vamos a estudiar esencialmente el caso de sistemas hiperregulares. No obstante todos los resultados son válidos también en el caso de sistemas regulares (no hiperregulares), aunque entonces todas las referencias a T^*Q, deben hacerse a $\mathcal{FL}(\mathrm{T}Q) \subset \mathrm{T}^*Q$.

Proposición 31 *Sea $(\mathrm{T}Q, \mathcal{L})$ un sistema lagrangiano hiperregular. Entonces existe una única función $h \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}^*Q)$ tal que $\mathcal{FL}^*h = E_\mathcal{L}$.*

Dicha función se denomina función hamiltoniana *asociada al sistema $(\mathrm{T}Q, \mathcal{L})$, y la terna $(\mathrm{T}^*Q, \Omega, h)$ es el* sistema hamiltoniano canónico *asociado a $(\mathrm{T}Q, \mathcal{L})$.*

(*Dem.*) Trivial al ser $\mathcal{FL}$ un difeomorfismo. ■

Puesto que $E_\mathcal{L}$ representa al observable “energía total” del sistema en el formalismo lagrangiano, la función h representa el mismo observable en el formalismo hamiltoniano canónico.

Con todo ello, en este formalismo se puede establecer los postulados equivalentes a los enunciados para la dinámica lagrangiana, que son los siguiente:

Postulado 6 (Primer postulado del formalismo hamiltoniano canónico)*:*

El espacio de configuración Q de un sistema dinámico con n grados de libertad tiene estructura de variedad diferencial n-dimensional.

El espacio de estados es el fibrado cotangente T^*Q de la variedad Q. Dicho espacio de estados recibe el nombre de espacio de estados *o* de fases de posiciones-momentos *del sistema.*

Postulado 7 (Segundo postulado del formalismo hamiltoniano canónico)*:*

Los observables o magnitudes físicas de un sistema dinámico son funciones de $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}^*Q)$.

El resultado de una medida de un observable es el valor que toma la función que lo representa en un punto del espacio de estados (es decir, en un estado determinado, según el primer postulado).

Postulado 8 (Tercer postulado del formalismo hamiltoniano canónico)*:*

La dinámica del sistema está recogida en la función hamiltoniana *$h \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}^*Q)$ del sistema*

Postulado 9 *(*(Cuarto postulado del formalismo hamiltoniano canónico)*:*

Las trayectorias dinámicas del sistema son las curvas integrales de un campo vectorial $X_h \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}^*Q)$ que es solución del sistema

$$i(X_h)\Omega = \mathrm{d}h \tag{18}$$

Estas ecuaciones son las denominadas ecuaciones de Hamilton *y el campo vectorial solución (si existe) se llama* campo dinámico hamiltoniano.

Definición 39 *Dado un sistema dinámico hamiltoniano, se denomina* problema hamiltoniano *planteado por dicho sistema a hallar un campo vectorial que satisfaga las condiciones (18).*

Proposición 32 *Sea* $(\mathrm{T}^*Q, \Omega, h)$ *el sistema hamiltoniano asociado a un sistema dinámico lagrangiano hiperregular. Entonces existe un único campo vectorial* $X_h \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ *que es solución de la ecuación (18).*

(*Dem.*) Es una consecuencia directa de que Ω es no degenerada. ∎

Expresiones locales:

En coordenadas naturales de T^*Q, es inmediato obtener que, si $X_h = f^i \dfrac{\partial}{\partial q^i} + g_i \dfrac{\partial}{\partial p_i}$, entonces la ecuación (18) da lugar al sistema

$$f^i = \frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h}{\partial p_i} \quad , \quad g_i = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial h}{\partial q^i}$$

que es un sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden.

Ahora se puede establecer el siguiente teorema de equivalencia:

Teorema 7 *Sea* $(\mathrm{T}Q, \mathcal{L})$ *un sistema lagrangiano hiperregular.*

1. *Si* $X_{\mathcal{L}}$ *es el campo dinámico lagrangiano, entonces existe un único campo vectorial* $\mathcal{FL}_* X_{\mathcal{L}} \equiv X_h \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}^*Q)$ *que es solución de la ecuación (18)*

   Recíprocamente, si X_h *es el campo dinámico hamiltoniano, entonces existe un único campo vectorial* $\mathcal{FL}_*^{-1} X_h \equiv X_{\mathcal{L}} \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ *que es solución de la ecuación (14)*

2. *De otra manera, si* $\gamma \colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow Q$ *es una curva solución del sistema lagrangiano, y* $\tilde{\gamma} \colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{T}Q$ *es su levantamiento canónico a* $\mathrm{T}Q$*, entonces* $\mathcal{FL} \circ \tilde{\gamma}$ *es una curva solución del sistema hamiltoniano asociado en* T^*Q *(esto es, es una curva integral de* X_h*).*

   Recíprocamente, si $\zeta \colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{T}^*Q$ *es una curva solución del sistema hamiltoniano asociado, entonces* $\pi_Q \circ \zeta$ *subida a* $\mathrm{T}Q$ *es una curva solución del problema lagrangiano inicial.*

(*Dem.*) Para el primer apartado se tiene

$$0 = i(X_{\mathcal{L}})\Omega_{\mathcal{L}} - \mathrm{d}E_{\mathcal{L}} = i(X_{\mathcal{L}})(\mathcal{FL}^*\Omega) - \mathrm{d}(\mathcal{FL}^*h) = \mathcal{FL}^*[i(X_h)\Omega - \mathrm{d}h]$$

y, dado que $\mathcal{FL}$ es difeomorfismo, esto equivale a la ecuación (18)

La demostración del segundo apartado es inmediata. ∎

Comentario:

Si $(\mathrm{T}Q, \mathcal{L})$ es un sistema casi-regular y $j_0 \colon P \hookrightarrow \mathrm{T}^*Q$ es la inmersión homeomorfa natural de $P \equiv \mathcal{FL}(\mathrm{T}Q)$ en T^*Q, entonces se puede demostrar que existe $h_0 \in \mathrm{C}^\infty(P)$ tal que $\mathcal{FL}_0^* h_0 = E_{\mathcal{L}}$, donde $\mathcal{FL}_0 \colon \mathrm{T}Q \longrightarrow P$ está definida por $\mathcal{FL} = j_0 \circ \mathcal{FL}_0$. Esta función es la *hamiltoniana canónica* del sistema, y tiene la misma interpretación física que h.

De este modo, tomando $\Omega_0 = j_0^*\Omega$, la terna (P, Ω_0, h_0) es en este caso el *sistema hamiltoniano canónico* asociado a $(\mathrm{T}Q, \mathcal{L})$, y todo lo anteriormente enunciado para $(\mathrm{T}^*Q, \Omega, h)$ hace ahora alusión a este sistema.

En particular, la ecuación equivalente a (18) es

$$i(X_{h_0})\Omega_0 = \mathrm{d}h_0 \quad ; \quad X_{h_0} \in \mathfrak{X}(P)$$

que es, en general, incompatible y, en los casos más interesantes, X_{h_0} existe sólo en alguna subvariedad $S \hookrightarrow P$. Además, dicha solución no es única, ya que si X_{h_0} es una solución, entonces $X_{h_0} + Z$, con $Z \in \ker \Omega_0$, es también solución.

2.3.3 Discusión y comparación

A modo de resumen de lo tratado en esta sección, se van a señalar las características esenciales de los formalismos lagrangiano y hamiltoniano canónico de los sistemas dinámicos lagrangianos.

En el formalismo lagrangiano se tiene que:

1. La descripción local del mismo se basa en los siguientes puntos:

   (a) Para describir locálmente los *estados* del sistema se han utilizado: las *coordenadas generalizadas* (q^i) $(i = 1, \ldots, n)$, que representan los grados de libertad del sistema, y las *velocidades generalizadas* (v^i) correspondientes a cada una de las coordenadas generalizadas.

   (b) La información dinámica del sistema está contenida en la *función lagrangiana* del sistema, $\mathcal{L}(q^i, v^i)$.

   (c) La evolución dinámica del sistema está descrita por las *ecuaciones de Euler-Lagrange*

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0 \quad , \quad \frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = v^i$$

   que es un sistema de n ecuaciones de segundo orden en las variables q^i.

   (d) El sistema dinámico es *regular* si $\det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^i \partial v^j}(q, v)\right) \neq 0$ en todos los puntos (q, v). En este caso, dadas unas condiciones iniciales (esto es, un estado del sistema), la solución de las ecuaciones es única.

2. En el contexto de la descripción geométrica, las características anteriores se traducen respectivamente en que:

   (a) El espacio de estados del sistema es el fibrado tangente $\mathrm{T}Q$ a la variedad Q que constuye el espacio de configuración del sistema.

   (b) En lo concerniente a la dinámica, la función lagrangiana $\mathcal{L} \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}Q)$ es depositaria de toda la información dinámica del sistema.

   (c) A partir de dicha función, y utilizando las estructuras geométricas propias del fibrado tangente (el *endomorfismo canónico* y el *campo de Liouville*), se construyen la 2*-forma de Lagrange* $\Omega_\mathcal{L}$ y la *energía lagrangiana* del sistema, $E_\mathcal{L}$, con las cuales se obtienen las ecuaciones de evolución lagrangianas que son: $i(X_\mathcal{L})\Omega_\mathcal{L} = \mathrm{d}E_\mathcal{L}$, junto con la condición de segundo orden $J(X_\mathcal{L}) = \Delta$. Las curvas integrales de $X_\mathcal{L} \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ son las trayectorias dinámicas del sistema.

   (d) El sistema dinámico es *regular* si $\Omega_\mathcal{L}$ es una forma no degenerada. En tal caso el campo vectorial $X_\mathcal{L}$ es único y es, necesariamente una E.D.S.O.

En lo que respecta al formalismo hamiltoniano canónico se tiene que:

1. La descripción local del mismo se basa en los siguientes puntos:

   (a) Los estados del sistema van a estar ahora descritos por medio de coordenadas de posición generalizadas (q^i) y sus correspondientes momentos generalizados (p_i).

   (b) La información dinámica del sistema está contenida en la *función hamiltoniana* del sistema, $h(q^i, p_i)$.

   (c) La evolución dinámica del sistema está descrita por las *ecuaciones de Hamilton*

   $$\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h}{\partial p_i} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial h}{\partial q^i}$$

   que es un sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden.

   (d) El sistema dinámico es *regular* si $\mathcal{FL}$ es un difeomorfismo (local).
   En este caso, dadas unas condiciones iniciales (esto es, un estado del sistema), la solución de las ecuaciones es única.

2. En el contexto de la descripción geométrica, las características anteriores se traducen respectivamente en que:

   (a) El espacio de estados del sistema es $\mathcal{FL}(\mathrm{T}Q)$, y puede ser, o bien el fibrado cotangente T^*Q a la variedad Q que constituye el espacio de configuración del sistema, o bien un abierto $U \subset \mathrm{T}^*Q$, o una subvariedad $P \hookrightarrow \mathrm{T}^*Q$ (según la regularidad de $\mathcal{L}$).

   (b) La información dinámica estará dada por $h \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}^*Q)$, (resp. $h_0 \in \mathrm{C}^\infty(P)$): la *función hamiltoniana*.

   (c) Las ecuaciones de evolución hamiltonianas se obtienen a partir de esta función y de la 2-forma canónica natural del fibrado cotangente Ω, y son $i(X_h)\Omega = \mathrm{d}h$ (resp. $i(X_{h_0})\Omega_0 = \mathrm{d}h_0$). Las curvas integrales del campo vectorial solución son las trayectorias dinámicas del sistema.

   (d) El sistema dinámico es *regular* si $\mathcal{FL}$ es un difeomorfismo (local), en cuyo caso $\mathcal{FL}(\mathrm{T}Q) = U \subseteq \mathrm{T}^*Q$.

Entre las razones que hacen especialmente interesante este formalismo se pueden citar las siguientes:

- En el ámbito local, es manifiesto el carácter asimétrico que las variables q^i y v^i tienen en las ecuaciones de evolución lagrangianas, lo cual no ocurre en las ecuaciones de evolución del formalismo hamiltoniano con las coordenadas q^i y p_i.

- En el contexto geométrico, en el formalismo lagrangiano, la 2-forma de Lagrange y la energía lagrangiana, que aparecen en las ecuaciones dinámicas, se obtienen a partir de la función lagrangiana y de las estructuras canónicas del fibrado tangente. Esto significa que la información dinámica se halla repartida entre la 2-forma lagrangiana y la energía lagrangiana.

  En contraposición, en el formalismo hamiltoniano canónico, los elementos que desempeñan análogo papel en las ecuaciones dinámicas son la 2-forma canónica natural del fibrado cotangente y la función hamiltoniana; la primera de las cuales sólo contiene información geométrica y la segunda sólo información dinámica.

- Finalmente, las características del formalismo hamiltoniano canónico lo hacen idóneo con vistas a la posible cuantización del sistema físico.

A modo de conclusión, un *sistema dinámico lagrangiano* (regular) se puede también interpretar como una terna $(\mathrm{T}Q, \Omega_{\mathcal{L}}, E_{\mathcal{L}})$ si se trata del formalismo lagrangiano, o una terna $(\mathrm{T}^*Q, \Omega, h)$ (resp. (P, Ω_0, h_0)), si se trata del formalismo hamiltoniano canónico. En ambos casos, los espacios de estados son variedades diferenciales dotados de 2-formas diferenciales cerradas (no degeneradas, si los sistemas son regulares).

3 Sistemas dinámicos hamiltonianos

En la sección anterior se han estudiado los *sistemas dinámicos lagrangianos*, de los que, según se comentó, los *sistemas dinámicos Newtonianos conservativos* eran un caso particular.

Sin embargo, no todos los sistemas físicos (sean o no de tipo mecánico) pueden ser catalogados dentro de esta categoría. En efecto: una de las características de los sistemas lagrangianos era que geométricamente, su espacio de fases tenía la estructura de fibrado tangente (o cotangente, si se trataba del formalismo hamiltoniano canónico dual). No obstante, existen sistemas dinámicos cuyos espacios de estados no tienen estructura de fibrado tangente o cotangente [15].

Para poder describir geométricamente estos sistemas es, por tanto, necesario ampliar la gama de variedades diferenciales admisibles como espacio de fases (éstas serán, esencialmente, las *variedades simplécticas* y *presimplécticas*), y definir un nuevo tipo de sistema dinámico que englobe los ya tratados.

3.1 Nociones de geometría simpléctica

Dado que en el tratamiento geométrico de los sistemas dinámicos regulares juegan un papel fundamental las denominadas *variedades simplécticas* y *presimplécticas*, comenzaremos, en esta sección, introduciendo los conceptos y propiedades geométricas básicas concernientes a este tipo de variedades.

3.1.1 Variedades simplécticas y presimplécticas

Definición 40 (a) *Sea M una variedad diferencial. Una* forma simpléctica [16] *en M es una 2-forma diferencial $\Omega \in \mathit{\Omega}^2(M)$ tal que:*

1. *Es cerrada (por tanto, escribiremos $\Omega \in Z^2(M)$) : $\mathrm{d}\Omega = 0$.*
2. *Es no degenerada (es decir, su rango es máximo): $\Omega_m(X_m, Y_m) = 0$, $\forall m \in M$, $\forall Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\Leftrightarrow\ X = 0$.*

Si la forma es cerrada y degenerada entonces se dice que es una forma presimpléctica.

(b) *Una* variedad simpléctica *(resp.* variedad presimpléctica*) es una variedad diferencial dotada de una forma simpléctica (resp. presimpléctica), esto es, una pareja (M, Ω).*

Si la forma simpléctica (resp. presimpléctica) es exacta ($\exists \Theta \in \mathit{\Omega}^1(M)$ tal que $\mathrm{d}\Theta = \Omega$), entonces Ω es una forma simpléctica *(resp.* presimpléctica*)* exacta*, (M, Ω) es una* variedad simpléctica *(resp.* presimpléctica*)* exacta *y Θ recibe el nombre de* potencial simpléctico *(resp.* presimpléctico*).*

Comentarios:

- Obsérvese que una 2-forma diferencial no degenerada sólo puede estar definida en variedades de dimensión par, por tanto una variedad simpléctica tiene dimensión par: $\dim M = 2n$.
- Dado que, de acuerdo con el *lema de Poincaré*, toda forma cerrada es locálmente exacta, si Ω es una forma simpléctica o presimpléctica, para todo punto existe un entorno abierto de coordenadas $U \subset M$ y una forma $\vartheta \in \mathit{\Omega}^1(U)$ tal que $\Omega \mid_U = \mathrm{d}\vartheta$. Se denomina *potencial simpléctico (presimpléctico) local* a toda 1-forma ϑ que satisfaga esta condición.

  Es evidente que si $\vartheta \in \mathit{\Omega}^1(U)$ y $\vartheta' \in \mathit{\Omega}^1(U')$ son dos potenciales simplécticos o presimplécticos, entonces $\vartheta' = \vartheta + \mathrm{d}f$ en $U \cap U'$, para algún $f \in \mathrm{C}^\infty(U \cap U')$.

[15] Por ejemplo, el sistema que describe clásicamente una partícula con spin (véase [16]).

[16] El término *simpléctico* proviene del griego "$\sigma\iota\mu\pi_Q\lambda\epsilon\kappa\tau\iota\kappa o$". Fué introducido por H. Weyl, quien sustituyó la raiz latina del término "complejo", para hacer referencia a la estructura del grupo $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$. Aun cuando la estructura de las variedades simplécticas había sido implícitamente considerada anteriormente, no es hasta los años 50 cuando la geometría simpléctica aparece como rama diferenciada en la Geometría Diferencial, siendo A. Lichnerowicz el primero que utilizó el término *variedad simpléctica*.

El siguiente teorema muestra como es la estructura local de las variedades simplécticas.

Teorema 8 (de Darboux) *Sea (M,Ω) una variedad simpléctica $2n$-dimensional. Para todo punto $m \in M$ existe un entorno abierto que es el dominio de una carta local $(U; x^i, y_i)_{i=1\ldots n}$, tal que la forma simpléctica adopta la expresión*

$$\Omega\mid_U = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}y_i$$

Estas cartas locales se denominan cartas simplécticas *y sus coordenadas* coordenadas canónicas *o* coordenadas de Darboux *de la variedad simpléctica.*

(*Dem.*) En primer lugar hay que recordar un conocido resultado de álgebra lineal que enuncia que:

Lema 3 *Dado un espacio vectorial de dimensión $2n$, para toda forma bilineal antisimétrica de rango $2n$, existe una base (e_k) $(k = 1,\ldots,2n)$, de dicho espacio con base dual (α^k) tal que la forma en cuestión se expresa como $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha^i \wedge \alpha^{i+n}$ o, lo que es lo mismo, respecto a la cual la matriz de la forma es*

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

donde I_n designa la matriz identidad de orden n.

Teniendo esto en cuenta, para demostrar el teorema será suficiente con demostrar que para cada punto $m \in M$ existe una carta local $U \subset M$, con $m \in U$, en la cual la expresión de la forma simpléctica es constante. Se puede, entonces, considerar en U la forma $\Omega_1 \in \mathit{\Omega}^2(U)$ cuya expresión es constante (en unas determinadas coordenadas) y tal que $\Omega_1(p) = \Omega(m)$, $\forall p \in U$. Se trata de probar que existe una transformación $F_1 \colon U \longrightarrow U$ tal que $F_1^*\Omega = \Omega_1$ (esto es, la expresión de Ω en esas coordenadas es Ω_1).

Para ello se introduce la siguiente forma diferencial $\Omega_t \in \mathit{\Omega}^2(M \times \mathbb{R})$

$$\Omega_t \equiv \Omega - t(\Omega_1 - \Omega) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Esta forma tiene las siguientes propiedades:

1. Para cada $t \in [0,1]$, Ω_t es cerrada.
2. Es evidente que, para cada $t \in [0,1]$, $\Omega_t(m) = \Omega(m)$ y es, por tanto, no degenerada en m; luego define un isomorfismo lineal entre $\mathrm{T}_m M$ y $\mathrm{T}_m^* M$. Entonces, puesto que el conjunto de isomorfismos lineales de un espacio vectorial en su dual es abierto, existirá un entorno V de m (se puede tomar una bola) en el cual Ω_t es no degenerada para todo t [17].

Por otra parte, al ser $\Omega_1 - \Omega$ cerrada, por el *lema de Poincaré*, existe un entorno W de m en el cual $\Omega_1 - \Omega = \mathrm{d}\Theta$, para alguna 1-forma $\Theta \in \mathit{\Omega}^1(W)$, para la cual se puede suponer que $\Theta(m) = 0$. Tómese $U = V \cap W$. Considérese, entonces, el campo vectorial (dependiente del tiempo) $X_t \in \mathfrak{X}(M \times \mathbb{R})$ definido por

$$i(X_t)\Omega_t = -\Theta$$

cuya existencia está asegurada por el hecho de que Ω_t es no degenerada, y para el cual $X_t(m) = 0$, obviamente. Sea F_t el flujo de X_t en U, con condición inicial $F_0 = \mathrm{Id}$. Utilizando, ahora, la relación entre flujos y derivadas de Lie que, para campos vectoriales independientes del tiempo $X \in \mathfrak{X}(M)$ con flujo F_t es

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_t^*\eta) = F_t^*(\mathrm{L}(X)\eta) \quad , \quad \forall \eta \in \mathit{\Omega}^p(M)$$

[17] Y, dado que, en un entorno suficientemente pequeño V de m, se puede identificar V con $\mathrm{T}_m V$, es factible considerar el propio V como espacio vectorial lineal.

se obtiene que, al ser X_t dependiente del tiempo,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_t^*\Omega_t) &= F_t^*(\mathrm{L}(X_t)\Omega_t) + F_t^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega_t = F_t^*\mathrm{d}\,i(X_t)\Omega_t + F_t^*(\Omega_1 - \Omega) \\ &= F_t^*(-\mathrm{d}\Theta + (\Omega_1 - \Omega)) = F_t^*(-\mathrm{d}\Theta + \mathrm{d}\Theta) = 0\end{aligned}$$

y de aquí, integrando ambos miembros

$$0 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_t^*\Omega_t)\mathrm{d}t = F_1^*\Omega_1 - F_0^*\Omega_0 = F_1^*\Omega_1 - \Omega$$

por consiguiente

$$F_1^*\Omega_1 = \Omega$$

de modo que F_1 da el cambio de coordenadas que transforma Ω en la forma constante Ω_1. En esas coordenadas, que denotamos (x^i, y_i), la base a la que hace referencia el lema 3 es $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right\}$, y su dual es $\{\mathrm{d}x^i, \mathrm{d}y_i\}$; con lo que la aplicación de dicho lema concluye la demostración. ■

Comentarios:

- Para variedades presimplécticas existe un resultado similar. En efecto, si (M, Ω) una variedad presimpléctica $(2n+k)$-dimensional y $\mathrm{rang}\,\Omega = 2n$, entonces para todo punto $m \in M$ existe un entorno abierto que es el dominio de una carta local $(U; x^i, y_i, z^j)_{i=1\dots n, j=1,\dots,k}$, tal que
$$\Omega\mid_U = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}y_i$$
Estas cartas locales se denominan *cartas presimplécticas* y sus coordenadas *coordenadas canónicas* o *coordenadas de Darboux* de la variedad presimpléctica.
- El ejemplo arquetípico de variedad simpléctica lo constituye el fibrado cotangente de una variedad diferencial (véase el teorema 5). En este caso, además, las cartas naturales del fibrado son también cartas simplécticas.

Finalmente, como consecuencia inmediata de la definición se tiene que:

Proposición 33 *Toda variedad simpléctica es una variedad orientada.*

(*Dem.*) En efecto, pues a partir de la forma simpléctica se puede definir una forma de volumen $\Omega^n := \wedge^n\Omega \in \mathit{\Omega}^{2n}(M)$.

Esta forma de volumen se denomina *forma de Liouville*. ■

3.1.2 Isomorfismo canónico. Campos hamiltonianos

El hecho de que una forma simpléctica sea necesariamente no degenerada tiene importantes consecuencias. La primera de ellas es que toda forma diferencial $\Omega \in \mathit{\Omega}^p(M)$ permite definir una aplicación lineal

$$\begin{array}{cccc}\hat{\Omega} & : & \mathrm{T}M & \longrightarrow & \mathrm{T}^*M \\ & & (p, X_p) & \mapsto & (p, i(X_p)\Omega_p)\end{array}$$

y su extensión natural (que se indica con el mismo símbolo)

$$\begin{array}{cccc}\hat{\Omega} & : & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathit{\Omega}^{p-1}(M) \\ & & X & \mapsto & i(X)\Omega\end{array}$$

Dada una variedad diferencial M (de dimensión par) y una forma cerrada $\Omega \in \mathit{\Omega}^2(M)$; es obvio que Ω es no degenerada (simpléctica) si, y sólo si, $\hat{\Omega}$ es un isomorfismo. Entonces:

Definición 41 *Si* (M,Ω) *es una variedad simpléctica,* $\hat{\Omega}$ *se denomina* isomorfismo canónico *inducido por* Ω.

Dada una variedad simpléctica (M,Ω), toda función $f\in \mathrm{C}^\infty(M)$ tiene unívocamente asociado un campo vectorial $X_f\in\mathfrak{X}(M)$ mediante la aplicación

$$\hat{\Omega}^{-1}\circ\mathrm{d}\colon \mathrm{C}^\infty(M)\xrightarrow{\mathrm{d}}\varOmega^1(M)\xrightarrow{\hat{\Omega}^{-1}}\mathfrak{X}(M)$$

esto es, definido por $X_f:=\hat{\Omega}^{-1}(\mathrm{d}f)$ o, lo que es lo mismo, implícitamente por

$$i(X_f)\Omega:=\mathrm{d}f \tag{19}$$

Comentarios:

- Obsérvese que la aplicación $\hat{\Omega}^{-1}\circ\mathrm{d}$ no es sobreyectiva, esto es, aunque el isomorfismo canónico permite asociar a todo campo vectorial X una 1-forma diferencial $i(X)\Omega$, no es posible siempre asociarle una función ya que, para ello, dicha forma tendría que ser necesariamente exacta, lo que no es el caso general (de hecho, en general, ni siquiera es cerrada).
- Tampoco la aplicación $\hat{\Omega}^{-1}\circ\mathrm{d}$ es inyectiva, dado que dos funciones que difieran en una constante tienen asociado el mismo campo hamiltoniano.

Como consecuencia del primer comentario, se puede dar la siguiente definición:

Definición 42 *Sea una variedad simpléctica* (M,Ω). $X\in\mathfrak{X}(M)$ *es un* campo hamiltoniano (global) *si* $i(X)\Omega$ *es una forma exacta.*

En este caso, la función $f\in\mathrm{C}^\infty(M)$ *tal que* $i(X)\Omega=\mathrm{d}f$ *se denomina* función hamiltoniana (global) *del campo* X.

Se designa por $\mathfrak{X}_h(M)$ *al conjunto de los campos hamiltonianos globales en* M.

Obsérvese que, teniendo en cuenta el comentario previo a la ecuación (19), toda función $f\in\mathrm{C}^\infty(M)$ es una función hamiltoniana de un campo hamiltoniano global X_f.

No obstante, esta exigencia sobre los campos vectoriales es bastante restrictiva y, en lo que concierne al interés físico, es suficiente con lo siguiente:

Definición 43 *Sea una variedad simpléctica* (M,Ω). $X\in\mathfrak{X}(M)$ *es un* campo hamiltoniano local *si* $i(X)\Omega$ *es una forma cerrada.*

En este caso, el lema de Poincaré asegura, para todo punto $m\in M$, *la existencia de un entorno* $U\ni m$ *y de una función* $f\in\mathrm{C}^\infty(U)$ *tal que* $i(X)\Omega=\mathrm{d}f$ *en* U. *Dicha función se denomina* función hamiltoniana local *del campo* X *en* U.

Se designa por $\mathfrak{X}_{lh}(M)$ *al conjunto de los campos hamiltonianos locales en* M.

Comentarios:

- Es evidente que $\mathfrak{X}_h(M)\subset\mathfrak{X}_{lh}(M)$. Así pues, todo lo que se enuncie a partir de ahora para campos locálmente hamiltonianos será también válido para los campos hamiltonianos globales.
- Las anteriores definiciones son válidas también en variedades presimplécticas. La diferencia es que, en ese caso, la aplicación $\hat{\Omega}$ no es un isomorfismo porque no es sobreyectiva y, por tanto, no toda función en la variedad tiene asociado un campo vectorial hamiltoniano.

Expresiones locales:

Si $(U; x^i, y_i)$ es una carta simpléctica, se tiene que

$$\begin{aligned} X \mid_U &= A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + B_i \frac{\partial}{\partial y_i} \\ \mathrm{d}f \mid_U &= \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i + \frac{\partial f}{\partial y_i}\mathrm{d}y_i \end{aligned}$$

entonces el campo X es la solución de la ecuación (19), es decir:

$$0 = (i(X)\Omega - \mathrm{d}f) \mid_U = \left(-B_i - \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i + \left(A^i - \frac{\partial f}{\partial y_i}\right)\mathrm{d}y_i$$

es decir,

$$X \mid_U = \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y_i}$$

y sus curvas integrales se obtienen, por consiguiente, como solución del sistema

$$\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial y^i}$$

que se denominan *ecuaciones de Hamilton* del campo locálmente hamiltoniano.

Un importante resultado técnico que será de posterior utilidad es el siguiente:

Lema 4 *Sea (M, Ω) una variedad simpléctica. Para todo $m \in M$ existen $X_j \in \mathfrak{X}_{lh}(M)$, $(j = 1, \ldots, 2n)$, tal que $\{X_j(m)\}$ es una base de $\mathrm{T}_m M$* [18].

(*Dem.*) Es inmediata: basta con utilizar cartas simplécticas. ∎

En adelante vamos a centrar nuestro estudio en variedades simplécticas.

3.1.3 Formas invariantes

La noción de campo hamiltoniano que se acaba de introducir está íntimamente relacionada con las propiedades de la forma simpléctica. Vamos a dedicar este apartado a explorar esta relación.

En primer lugar, introduciremos el siguiente concepto:

Definición 44 *Sea una variedad diferencial M y $X \in \mathfrak{X}(M)$. $\beta \in \Omega^p(M)$ es una* forma invariante (absoluta) *por el campo X si $\mathrm{L}(X)\beta = 0$.*

Comentario:

Recordando la interpretación de la derivada de Lie, el que una forma sea invariante absoluta por X significa que es invariante a lo largo de las curvas integrales de X. Entonces, esto es equivalente a pedir que, si F_t designa el flujo del campo vectorial X, $F_t^*\beta = \beta$.

Con esta nomenclatura, estamos en condiciones de enunciar el siguiente resultado que, a menudo, se utiliza como definición alternativa de campo hamiltoniano:

Teorema 9 *Sea (M, Ω) una variedad simpléctica (resp. presimpléctica). $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un* campo hamiltoniano local *si y sólo si Ω es una forma invariante absoluta por X.*

[18] Esto es, los campos locálmente hamiltonianos expanden locálmente el fibrado tangente a M.

(*Dem.*) Por ser Ω una forma cerrada resulta que

$$\mathrm{L}(X)\Omega = i(X)\mathrm{d}\Omega + \mathrm{d}\, i(X)\Omega = \mathrm{d}\, i(X)\Omega = 0 \;\Leftrightarrow\; i(X)\Omega \in Z^1(M) \;\Leftrightarrow\; X \in \mathfrak{X}_{lh}(M)$$

■

Comentario:

Este resultado relaciona de manera inequívoca el concepto de campo hamiltoniano con la propiedad de que la Ω sea una forma cerrada, aunque no es tan preciso como la definición dada en el apartado anterior, ya que no permite distinguir los campos hamiltonianos globales.

De este teorema se deduce el siguiente corolario:

Teorema 10 (de Liouville)*: Sea* (M,Ω) *una variedad simpléctica y sea* Ω^n *la forma de volumen de Liouville. Entonces* $\mathrm{L}(X)\Omega^n = 0$*, para todo campo* $X \in \mathfrak{X}_{lh}(M)$*.*

(*Dem.*) Inmediato. ■

Además, es posible probar que:

Proposición 34 *Sea* (M,Ω) *una variedad simpléctica (resp. presimpléctica).* $\mathfrak{X}_{lh}(M)$ *es cerrado para el paréntesis de Lie de campos vectoriales y es un álgebra de Lie (real).*

(*Dem.*) Se trata de probar que, para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}_{lh}(M)$, $[X,Y] \in \mathfrak{X}_{lh}(M)$. Teniendo en cuenta la relación

$$i([X,Y])\Omega = \mathrm{L}(X)\, i(Y)\Omega - i(Y)\, \mathrm{L}(X)\Omega$$

y el teorema 9, se tiene que, si $i(Y)\Omega \underset{U}{\simeq} \mathrm{d}f$,

$$i([X,Y])\Omega = \mathrm{L}(X)\, i(Y)\Omega \underset{U}{\simeq} \mathrm{L}(X)\mathrm{d}f = \mathrm{d}\,\mathrm{L}(X)f$$

La linealidad, antisimetría e identidad de Jacobi son inmediatas. ■

Se acaba de probar que en una variedad simpléctica (M,Ω), la forma simpléctica y la forma de Liouville son invariantes por todos los campos hamiltonianos locales. Cabe, ahora, preguntarse si existe alguna otra forma diferencial en $\Omega^p(M)$ que tenga esta misma propiedad o, lo que es lo mismo, cómo son todas las formas diferenciales que la satisfacen. La respuesta a esta cuestión está en un teorema cuya versión original fue establecida por Lee Hwa Chung [8] y en el cual se estudiaba la unicidad de las *formas integrales invariantes* por transformaciones locales generadas por los flujos de los campos locálmente hamiltonianos [19]. Su enunciado es el siguiente:

Teorema 11 *Sea* (M,Ω) *una variedad simpléctica y* $\alpha \in \Omega^p(M)$ *una forma invariante absoluta para todo campo* $X \in \mathfrak{X}_{lh}(M)$*. Entonces:*

1. *Si* $p = 2r-1$*, con* $r \in \mathbb{N}$*, (esto es,* p *es impar), entonces* $\alpha = 0$*.*
2. *Si* $p = 2r$*, con* $r \in \mathbb{N}$*, (esto es,* p *es par), entonces* $\alpha = c\overbrace{\Omega \wedge \ldots \wedge \Omega}^{(r\ veces)} \equiv c(\wedge\Omega)^r$ *, con* $c \in \mathbb{R}$*.*

(*Dem.*) Vamos a hacer la demostración para el caso $p \leq 2$ que es el único que utilizaremos posteriormente (para la demostración del caso general, véanse [13], [4]).

[19] La demostración de dicho teorema es local, haciendo uso en ella de cartas de coordenadas simplécticas.

Puesto que α es invariante por $\mathfrak{X}_{lh}(M)$, para todo $X \in \mathfrak{X}_{lh}(M)$ se tiene que

$$0 = \mathrm{L}(X)\alpha = \mathrm{d}\, i(X)\mathrm{d}\alpha + i(X)\mathrm{d}\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}\, i(X)\alpha = -\, i(X)\mathrm{d}\alpha \tag{20}$$

Ahora bien, para todo par $X, X' \in \mathfrak{X}_{lh}(M)$ existen $U \subset M$ y $f, g \in \mathrm{C}^\infty(U)$ tal que $i(X)\Omega \underset{U}{\simeq} \mathrm{d}f$ y $i(X')\Omega \underset{U}{\simeq} \mathrm{d}g$ (de ahora en adelante escribiremos $X|_U \equiv X_f$ y $X'|_U \equiv X_g$). Considérese, entonces, el campo locálmente hamiltoniano $X_h \in \mathfrak{X}_{lh}(M)$ cuya expresión en U es $X_h \underset{U}{\simeq} fX_g + gX_f$; su función hamiltoniana local en U es $h = fg \in \mathrm{C}^\infty(U)$ ya que

$$i(X_h)\Omega \underset{U}{\simeq} i(fX_g + gX_f)\Omega = f\, i(X_g)\Omega + g\, i(X_f)\Omega = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f \equiv \mathrm{d}h$$

Así pues

$$i(X_h)\alpha \underset{U}{\simeq} f\, i(X_g)\alpha + g\, i(X_f)\alpha$$

y entonces

$$\mathrm{d}\, i(X_h)\alpha \underset{U}{\simeq} \mathrm{d}f \wedge i(X_g)\alpha + f\mathrm{d}\, i(X_g)\alpha + \mathrm{d}g \wedge i(X_f)\alpha + g\mathrm{d}\, i(X_f)\alpha$$

Pero, teniendo en cuenta (20),

$$\mathrm{d}\, i(X_h)\alpha = -\, i(X_f h)\mathrm{d}\alpha \underset{U}{\simeq} -f\, i(X_g)\mathrm{d}\alpha - g\, i(X_f)\mathrm{d}\alpha = f\mathrm{d}\, i(X_g)\alpha + g\mathrm{d}\, i(X_f)\alpha$$

y comparando ambos resultados se concluye que

$$\mathrm{d}f \wedge i(X_g)\alpha + \mathrm{d}g \wedge i(X_f)\alpha \underset{U}{\simeq} 0 \tag{21}$$

Tomando en esta expresión $X_f = X_g$, esto es $f = g$, se obtiene que, para toda $f \in \mathrm{C}^\infty(U)$,

$$\mathrm{d}f \wedge i(X_f)\alpha \underset{U}{\simeq} 0 \tag{22}$$

Ahora hay dos posibilidades:

1. Si $p = 1$ entonces $i(X_f)\alpha \in \mathrm{C}^\infty(M)$ y esta última igualdad conduce a que $i(X_f)\alpha = 0$, para todo $X_f \in \mathfrak{X}_{lh}(M)$. Teniendo en cuenta que, según el lema 4, los campos locálmente hamiltonianos expanden locálmente $\mathrm{T}M$, se tendrá que $i(X)\alpha \underset{U}{\simeq} 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(U)$, y ello implica necesariamente que $\alpha \underset{U}{\simeq} 0$ (en cualquier U) y, por tanto, $\alpha = 0$.

2. Si $p = 2$, entonces se ha de concluir que:

   - O bien $i(X_f)\alpha = 0$.
   - O bien $i(X_f)\alpha \underset{U}{\simeq} \eta_{X_f}\mathrm{d}f$, donde $\eta_{X_f} \in \mathrm{C}^\infty(U)$.

   En el primer caso, razonando como en el punto anterior se concluiría que $\alpha = 0$. En el segundo caso, volviendo a la expresión (21) se obtiene que

   $$\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g\eta_{X_g} + \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}f\eta_{X_f} \underset{U}{\simeq} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g(\eta_{X_g} - \eta_{X_f}) \underset{U}{\simeq} 0$$

   para todas $f, g \in \mathrm{C}^\infty(U)$, luego ha de ser $\eta_{X_f} = \eta_{X_g} \equiv \eta$; esto es, la función η es independiente del campo locálmente hamiltoniano elegido.

   Así pues, para todo $X_f \in \mathfrak{X}_{lh}(M)$, se tiene que $i(X_f)\alpha \underset{U}{\simeq} \eta\mathrm{d}f$, con $\eta \in \mathrm{C}^\infty(M)$, entonces

   $$i(X_f)\alpha \underset{U}{\simeq} \eta\mathrm{d}f = \eta\, i(X_f)\Omega = i(X_f)(\eta\Omega)$$

   pero, teniendo de nuevo en cuenta el lema 4, esta igualdad lleva a que

   $$i(X)(\alpha - \eta\Omega) \underset{U}{\simeq} 0$$

   para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$; de donde se concluye que $\alpha = \eta\Omega$. Finalmente, por ser α invariante por todo campo locálmente hamiltoniano, se tendrá, para todo $Y \in \mathfrak{X}_{lh}(M)$,

   $$0 = \mathrm{L}(Y)\alpha = \mathrm{L}(Y)(\eta\Omega) = (\mathrm{L}(Y)\eta)\Omega + \eta\,\mathrm{L}(Y)\Omega = (\mathrm{L}(Y)\eta)\Omega$$

   De donde $\mathrm{L}(Y)\eta = 0$, resultado que, en virtud nuevamente del lema 4, es válido para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$; luego $\eta = c$ (constante) y así $\alpha = c\Omega$.

■

Comentarios:

- Así pues, las únicas formas invariantes absolutas por todos los campos hamiltonianos locales son múltiplos de productos exteriores de la estructura simpléctica y, por consiguiente, sólo pueden ser de grado par.
- Este resultado tiene una importancia capital en la caracterización de las *transformaciones canónicas*, como se pondrá de manifiesto más adelante.
- Para veriedades presimplécticas se puede demostrar también este mismo resultado [6].

3.1.4 Paréntesis de Poisson

En una variedad simpléctica, la forma simpléctica permite introducir de manera natural ciertas operaciones bien conocidas en el ámbito de la Mecánica Analítica. A saber:

Definición 45 *Sea (M,Ω) una variedad simpléctica. Se denomina* paréntesis de Lagrange *de dos campos vectoriales $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ a la aplicación bilineal*

$$\begin{array}{cccc} (\ ,\ ) & : & \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathrm{C}^\infty(M) \\ & & X,Y & \mapsto & (X,Y) \end{array}$$

definida por

$$(X,Y):=\Omega(X,Y):=i(Y)\,i(X)\Omega$$

Comentarios:

- Obsérvese que el resultado del paréntesis de Lagrange de dos campos es una función. A este respecto, no debe confundirse esta operación con el *paréntesis de Lie* de los mismos campos, cuyo resultado es otro campo vectorial.
- De la antisimetría de Ω se deduce inmediatamente la de esta operación, esto es, $(X,Y)=-(Y,X)$.

Teniendo en cuenta (19), a partir de este concepto se obtiene el siguiente:

Definición 46 *Sea (M,Ω) una variedad simpléctica. Se denomina* paréntesis de Poisson *de dos funciones $f,g\in\mathrm{C}^\infty(M)$ al paréntesis de Lagrange de sus campos hamiltonianos asociados, esto es, a la aplicación bilineal*

$$\begin{array}{cccc} \{\ ,\ \} & : & \mathrm{C}^\infty(M)\times\mathrm{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \mathrm{C}^\infty(M) \\ & & f,g & \mapsto & \{f,g\} \end{array}$$

definida por

$$\{f,g\}:=\Omega(X_f,X_g):=i(X_g)\,i(X_f)\Omega$$

Expresiones locales:

Si $(U;x^i,y_i)$ es una carta simpléctica y

$$\begin{aligned} X\mid_U &= A^i\frac{\partial}{\partial x^i}+B_i\frac{\partial}{\partial y_i} \\ Y\mid_U &= C^i\frac{\partial}{\partial x^i}+D_i\frac{\partial}{\partial y_i} \end{aligned}$$

entonces

$$(X,Y)\mid_U=-B_iC^i+A^iD_i$$

Por otra parte,

$$\{f,g\}\mid_U = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x^i}$$

En particular, para las coordenadas canónicas x^i, y_i se tiene

$$\{x^i, x^j\} = 0 \ , \ \{y_i, y_j\} = 0 \ , \ \{x^i, y_j\} = \delta^i_j$$

Las principales propiedades del paréntesis de Poisson son:

Proposición 35 *Sea (M,Ω) una variedad simpléctica.*

1. *Antisimetría:* $\{f,g\} = -\{g,f\}$.
2. *Identidad de Jacobi:*
$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$$
3. $\{f,g\} = \mathrm{L}(X_g)f = -\mathrm{L}(X_f)g$
4. $X_{\{f,g\}} = [X_g, X_f]$.

(*Dem.*)

1. Inmediata a partir de la definición.
2. Es una consecuencia inmediata del hecho de que Ω sea cerrada.
3. Teniendo en cuenta la fórmula de Cartan para la derivada de Lie:
$$\{f,g\} = i(X_g)\,i(X_f)\Omega = i(X_g)\mathrm{d}f = \mathrm{L}(X_g)f$$
De análoga manera se prueba que $\{f,g\} = -\mathrm{L}(X_f)g$.
4. El enunciado es equivalente a que
$$\hat{\Omega}([X_g, X_f]) = i([X_g, X_f])\Omega = \mathrm{d}\{f,g\}$$
Recordando la proposición 34 y operando resulta
$$i([X_g, X_f])\Omega = \mathrm{L}(X_g)\,i(X_f)\Omega = \mathrm{L}(X_g)\mathrm{d}f = \mathrm{d}\,\mathrm{L}(X_g)\mathrm{d}f = \mathrm{d}\{f,g\} \tag{23}$$

■

Comentarios:

- Las dos primeras propiedades establecen que $\mathrm{C}^\infty(M)$ con el paréntesis de Poisson es un álgebra de Lie (real).
- La tercera propiedad permite dar una interpretación geométrica del paréntesis de Poisson de dos funciones: su resultado es una medida de la variación de una de ellas a lo largo de las curvas integrales del campo hamiltoniano asociado a la otra.
- La cuarta propiedad establece que existe un (anti) homomorfismo de álgebras de Lie entre $\mathfrak{X}(M)$, dotado con el paréntesis de Lie de campos vectoriales, y $\mathrm{C}^\infty(M)$, dotado con el paréntesis de Poisson de funciones.

Utilizando, de nuevo, el isomorfismo canónico, y teniendo presente la expresión (23) se puede establecer la siguiente generalización:

Definición 47 *Sea (M,Ω) una variedad simpléctica. Se denomina paréntesis de Poisson de dos 1-formas $\alpha,\beta\in\Omega^1(M)$ a la aplicación bilineal*

$$\begin{array}{rcccc} \{\ ,\ \} & : & \Omega^1(M)\times\Omega^1(M) & \longrightarrow & \Omega^1(M) \\ & & \alpha,\beta & \mapsto & \{\alpha,\beta\} \end{array}$$

definida por

$$\{\alpha,\beta\}:=\hat{\Omega}[X_\alpha,X_\beta]$$

donde $X_\alpha=\hat{\Omega}^{-1}(\alpha)$ y $X_\beta=\hat{\Omega}^{-1}(\beta)$.

Por la propia definición, es evidente que:

Proposición 36 *Sea (M,Ω) una variedad simpléctica. Entonces, para todas $f,g\in \mathrm{C}^\infty(M)$,*

$$\mathrm{d}\{f,g\}=\{\mathrm{d}f,\mathrm{d}g\}$$

Las propiedades del paréntesis de Poisson de 1-formas son obviamente análogas a las del paréntesis de Poisson de funciones.

3.1.5 Transformaciones canónicas y simplectomorfismos

Ya se vió en la sección anterior cómo las propiedades de la estructura simpléctica permitían definir el concepto de campo hamiltoniano local y como las curvas integrales de estos campos están determinadas en las cartas simplécticas por las ecuaciones de Hamilton. También se verá que es precisamente este tipo de campos vectoriales el adecuado para describir los sistemas dinámicos. En otras palabras, hay una profunda relación entre la dinámica de los sistemas físicos y las propiedades geométricas de sus espacios de fases.

En este sentido, desde un punto de vista dinámico, se comprende que las transformaciones que serán, en un principio, más relevantes son aquellas que preservan la forma de las ecuaciones del movimiento, lo que, traducido a nuestro caso, significa que transforman campos hamiltonianos en campos hamiltonianos. En consecuencia se puede definir:

Definición 48 *Sean (M_1,Ω_1) y (M_2,Ω_2) variedades simplécticas tales que* $\dim M_1=\dim M_2$*, y un difeomorfismo $\Phi\in\mathrm{Dif}\,(M_1,M_2)$. Φ es una* transformación canónica *entre estas variedades si transforma biunívocamente todo campo hamiltoniano local en otro campo hamiltoniano local, esto es $\Phi_*(\mathfrak{X}_{lh}(M_1))=\mathfrak{X}_{lh}(M_2)$.*

En lo que respecta a los aspectos geométricos, las transformaciones más interesantes entre variedades simplécticas son las siguientes:

Definición 49 *Sean (M_1,Ω_1) y (M_2,Ω_2) variedades simplécticas tales que* $\dim M_1=\dim M_2$*, y un difeomorfismo $\Phi\in\mathrm{Dif}\,(M_1,M_2)$. Φ es un* simplectomorfismo *(o también una transformación simpléctica) entre estas variedades si preserva la estructura simpléctica de estas variedades, esto es, $\Phi^*\Omega_2=\Omega_1$.*

Dado que los campos hamiltonianos se definen a partir de la estructura simpléctica, es de esperar alguna relación entre estos tipos de transformaciones. De hecho, el teorema de Lee Hwa Chung permite probar que, en esencia, ambos conceptos se confunden:

Teorema 12 *Sean (M_1,Ω_1) y (M_2,Ω_2) variedades simplécticas tales que* $\dim M_1=\dim M_2$*, y un difeomorfismo $\Phi\in\mathrm{Dif}\,(M_1,M_2)$. La condición necesaria y suficiente para que Φ sea una transformación canónica es que $\Phi^*\Omega_2=c\Omega_1$, $c\in\mathbf{R}$.*

(*Dem.*) ($\Longrightarrow$) Si Φ es una transformación canónica entonces, $\forall X_1 \in \mathfrak{X}_{lh}(M_1)$, $\Phi_* X_1 = X_2 \in \mathfrak{X}_{lh}(M_2)$ y, de acuerdo con el teorema 9, $\mathrm{L}(X_2)\Omega_2 = 0$, entonces

$$0 = \Phi^*(\mathrm{L}(X_2)\Omega_2) = \mathrm{L}(\Phi_*^{-1}X_2)(\Phi^*\Omega_2) = \mathrm{L}(X_1)(\Phi^*\Omega_2)$$

por lo que, teniendo en cuenta el teorema de Lee Hwa Chung, se ha de concluir que $\Phi^*\Omega_2 = c\Omega_1$, $c \in \mathbf{R}$.

($\Longleftarrow$) Recíprocamente, $\forall X_1 \in \mathfrak{X}_{lh}(M_1)$ se tiene que $\mathrm{L}(X_1)\Omega_1 = 0$ y, por hipótesis, $\Phi^*\Omega_2 = c\Omega_1$, entonces

$$0 = \Phi^{*^{-1}}(\mathrm{L}(X_1)\Omega_1) = \mathrm{L}(\Phi_* X_1)(\Phi^{*^{-1}}\Omega_1) = \frac{1}{c}\,\mathrm{L}(\Phi_* X_1)\Omega_2$$

luego, por el teorema 9, $\Phi_* X_1 \in \mathfrak{X}_{lh}(M_2)$, por consiguiente Φ es una transformación canónica. ∎

Comentarios:

- La constante c que aparece en el teorema precedente se denomina *valencia* de la transformación canónica. Lo más habitual es trabajar con transformaciones en las que $c = 1$ (esto es, simplectomorfismos), que son las denominadas *transformaciones canónicas univalentes* o *restringidas*. También se utiliza otra terminología, denominándose simplemente transformaciones canónicas a las de valencia $c = 1$, y a las restantes *transformaciones canónicas generalizadas* o *simplectomorfismos generalizados*.
- Obsérvese que este teorema establece la conexión entre las dos definiciones del comienzo. Así, los conceptos de *transformación canónica univalente* y de *simplectomorfismo* son equivalentes.
- Todas estas definiciones y propiedades son también válidas para variedades presimplécticas. Se habla entonces de *presimplectomorfismos*.

Un resultado fundamental es el siguiente

Proposición 37 *Sea (M, Ω) una variedad simpléctica (resp. presimpléctica). $X \in \mathfrak{X}_{lh}(M)$ si, y sólo si, su flujo es un grupo de simplectomorfismos (resp. presimplectomorfismos) infinitesimales.*

(*Dem.*) La demostración es inmediata ya que, si F_t designa el flujo de X, entonces

$$\mathrm{L}(X)\Omega = 0 \;\Leftrightarrow\; F_t^*\Omega - \Omega = 0$$

∎

Finalmente es fácil probar que:

Proposición 38 *El conjunto de las transformaciones canónicas de una variedad simpléctica (resp. presimpléctica) (M, Ω), con la operación de composición, tiene estructura de grupo.*

En concreto, el grupo de todos los simplectomorfismos (resp. presimplectomorfismos) de una variedad simpléctica (resp. presimpléctica) se designa por $\mathbf{Sp}(M, \Omega)$, y tiene una importancia capital en el estudio de las *simetrías* de los sistemas dinámicos.

3.1.6 Caracterización de transformaciones canónicas

El último teorema enunciado tiene una serie de importantes corolarios, cuyos enunciados son tests alternativos del carácter canónico (e.d., simpléctico) de una transformación. El más importante de ellos hace referencia a los paréntesis de Poisson de funciones. Para ello, previamente hay que demostrar el siguiente resultado, que especifica básicamente cómo se transforman las funciones hamiltonianas:

Proposición 39 *Sean* (M_1, Ω_1) *y* (M_2, Ω_2) *variedades simplécticas tales que* $\dim M_1 = \dim M_2$, *y* $\Phi \in \mathrm{Dif}\,(M_1, M_2)$ *una transformación canónica de valencia c. Si* $X_1 \in \mathfrak{X}_{lh}(M_1)$, *sea* $X_2 := \Phi_* X_1 \in \mathfrak{X}_{lh}(M_2)$, *y sean* $h_1 \in \mathrm{C}^\infty(U_1)$ *y* $h_2 \in \mathrm{C}^\infty(U_2)$ *funciones hamiltonianas locales de* X_1 *y* X_2 *en* $U_1 \subset M_1$ *y* $U_2 := \Phi(U_1) \subset M_2$, *respectivamente. Entonces*

$$ch_1 = \Phi^* h_2 + k \quad , \quad k \in \mathbf{R}$$

(*Dem.*) De acuerdo con el teorema anterior,

$$\Phi^{*^{-1}}(i(X_1)\Omega_1) \mid_{U_1} = i(\Phi_* X_1)(\Phi^{*^{-1}}\Omega_1) \mid_{\Phi(U_1)} = \frac{1}{c}\, i(X_2)\Omega_2 \mid_{U_2} = \frac{1}{c}\mathrm{d}h_2$$

pero, por hipótesis, $i(X_1)\Omega_1 \mid_{U_1} = \mathrm{d}h_1$, luego

$$\Phi^{*^{-1}}(i(X_1)\Omega_1) \mid_{U_1} = \Phi^{*^{-1}}\mathrm{d}h_1 = \mathrm{d}(\Phi^{*^{-1}}h_1)$$

de donde, comparando ambas expresiones, se obtiene el resultado enunciado. ∎

Teniendo esto en cuenta, el resultado al que aludíamos es:

Teorema 13 *Sean* (M_1, Ω_1) *y* (M_2, Ω_2) *variedades simplécticas tales que* $\dim M_1 = \dim M_2$, *y un difeomorfismo* $\Phi \in \mathrm{Dif}\,(M_1, M_2)$. *La condición necesaria y suficiente para que* Φ *sea una transformación canónica (de valencia c) es que,* $\forall f_2, g_2 \in \mathrm{C}^\infty(M_2)$,

$$\Phi^*\{f_2, g_2\} = \frac{1}{c}\{\Phi^* f_2, \Phi^* g_2\}$$

(*Dem.*) Recuérdese que toda función en una variedad simpléctica tiene asociado un campo hamiltoniano. Sea, entonces, $X_{g_2} \in \mathfrak{X}_{lh}(M_2)$ el campo hamiltoniano asociado a g_2, $\forall g_2 \in \mathrm{C}^\infty(M_2)$.

($\Longrightarrow$) Si Φ es una transformación canónica, entonces $\Phi_*^{-1} X_{g_2} \in \mathfrak{X}_{lh}(M_1)$ y, de acuerdo con la proposición precedente, se tiene que $i(\Phi_*^{-1} X_{g_2})\Omega_1 = \mathrm{d}(\frac{1}{c}\Phi^* g_2)$, esto es, $\Phi_*^{-1} X_{g_2} = X_{\frac{1}{c}\Phi^* g_2}$, luego

$$\Phi^*\{f_2, g_2\} = \Phi^*(\mathrm{L}(X_{g_2}) f_2) = \mathrm{L}(\Phi_*^{-1} X_{g_2})\Phi^* f_2 = \mathrm{L}(X_{\frac{1}{c}\Phi^* g_2})\Phi^* f_2 = \frac{1}{c}\{\Phi^* f_2, \Phi^* g_2\}$$

($\Longleftarrow$) Recíprocamente, si se cumple la condición, por una parte se tiene que, $\forall f_2, g_2 \in \mathrm{C}^\infty(M_2)$,

$$\Phi^*\{f_2, g_2\} = \mathrm{L}(\Phi_*^{-1} X_{g_2})\Phi^* f_2$$

y por otra

$$\frac{1}{c}\{\Phi^* f_2, \Phi^* g_2\} = \mathrm{L}(X_{\frac{1}{c}\Phi^* g_2})\Phi^* f_2$$

luego igualando se tiene que

$$\Phi_*^{-1} X_{g_2} = X_{\frac{1}{c}\Phi^* g_2} \in \mathfrak{X}_{lh}(M_1)$$

$\forall X_{g_2} \in \mathfrak{X}_{lh}(M_2)$. Por tanto, Φ es una transformación canónica (que su valencia sea c se obtiene de inmediato, usando el teorema de Lee Hwa Chung). ∎

Comentario:

Este resultado enuncia que una transformación es canónica si, y sólo si, deja invariante (salvo una constante) el paréntesis de Poisson (de funciones hamiltonianas). Realmente, es otra forma de decir que deja invariante la estructura simpléctica de la variedad.

Como caso particular, si Φ transforma las funciones coordenadas (en una carta simpléctica) , $\Phi\colon (x^i, y_i, t) \mapsto (\tilde{x}^i, \tilde{y}_i, t)$; entonces Φ es una transformación canónica si, y sólo si, las funciones $\tilde{x}^i(x^j, y_j), \tilde{y}_i(x^j, y_j)$ satisfacen que:

$$\begin{aligned}
\Phi^*\{\tilde{x}^i, \tilde{x}^j\} = \{\tilde{x}^i(x^j, y_j), \tilde{x}^j(x^j, y_j)\} &= 0 \\
\Phi^*\{\tilde{y}_i, \tilde{y}_j\} = \{\tilde{y}_i(x^j, y_j), \tilde{y}_j(x^j, y_j)\} &= 0 \\
\Phi^*\{\tilde{y}_i, \tilde{x}^j\} = \{\tilde{y}_i(x^j, y_j), \tilde{x}^j(x^j, y_j)\} &= \delta_i^j
\end{aligned}$$

es decir, $(\tilde{x}^i, \tilde{y}_i)$ son coordenadas canónicas del sistema.

Otro resultado que permite caracterizar estas transformaciones es el siguiente:

Proposición 40 *Sean* (M_1,Ω_1) *y* (M_2,Ω_2) *variedades simplécticas tales que* $\dim M_1 = \dim M_2$*, y sea* $\Phi \in \mathrm{Dif}\,(M_1,M_2)$*. Sean* $U_1 \subset M_1$ *y* $U_2 := \Phi(U_1) \subset M_2$ *y* $\Theta_i \in \mathit{\Omega}^1(U_i)$ *tales que* $\Omega_i\mid_{U_i} = \mathrm{d}\Theta_i$*,* $(i=1,2)$*. La condición necesaria y suficiente para que* Φ *sea una transformación canónica (de valencia* c*) es que, exista una función* $F_1 \in \mathrm{C}^\infty(U_1)$ *tal que*

$$(\Phi^*\Theta_2 - c\Theta_1 - \mathrm{d}F_1)\mid_{U_1} = 0$$

o equivalentemente, que exista una función $F_2 \in \mathrm{C}^\infty(U_2)$ *tal que*

$$({\Phi^*}^{-1}\Theta_1 - \frac{1}{c}\Theta_2 - \mathrm{d}F_2)\mid_{U_2} = 0$$

Las funciones F_i *se denominan* funciones generatrices (de Poincaré) *de la transformación canónica, y la relación entre ambas es* $F_1 = c\Phi^*F_2 + k$*,* $k \in \mathbf{R}$*.*

(*Dem.*) Es inmediata ya que, según el teorema 12, Φ es una transformación canónica si, y sólo si,

$$0 = (\Phi^*\Omega_2 - c\Omega_1)\mid_{U_1} = \mathrm{d}(\Phi^*\Theta_2 - \Theta_1)$$

por lo que el lema de Poincaré conduce directamente al resultado.

El resultado concerniente a F_2 se obtiene de forma análoga y de la comparación entre ambos se llega a la relación entre estas funciones. ■

Comentario:

En los textos clásicos de Mecánica Racional aparece un concepto más general de función generatriz que el que aquí se acaba de presentar. En el contexto geométrico, son las denominadas *funciones generatrices de Weinstein* [1], pero su presentación excede el ámbito de esta exposición.

3.2 Sistemas dinámicos hamiltonianos

Una vez establecidas las nociones de Geometría Simpléctica, se puede pasar a tratar los sitemas dinámicos hamiltonianos.

3.2.1 Sistemas hamiltonianos. Ecuaciones de Hamilton

Para iniciar el estudio de los sistemas dinámicos hamiltonianos autónomos (desde el punto de vista de su descripción geométrica) vamos a establecer una formulación axiomática para los mismos Esta base axiomática incluye, por supuesto, tanto el formalismo lagrangiano como el hamiltoniano canónico de los sistemas lagrangianos (y, de hecho, los toma como modelo).

Así, en el ámbito en que estamos trabajando en este curso, como primer postulado se adopta el siguiente:

Postulado 10 (Primer postulado del formalismo hamiltoniano)*:*

El espacio de estados de un sistema dinámico es una variedad diferencial M*, dotada de una forma cerrada* $\Omega \in Z^2(M)$ *tal que:*

- *Si* Ω *es no degenerada, esto es* simpléctica*, entonces el sistema es* regular *y la dimensión de* M *es el doble del número de grados de libertad del sistema. En este caso, cada punto de dicha variedad representa un estado físico del sistema.*
- *Si* Ω *es degenerada, esto es* presimpléctica*, entonces el sistema es* singular *y la variedad* M *no es necesariamente de dimensión par.*

Si, en esencia, el primer postulado explica cómo son los estados físicos de un sistema, el segundo tiene que ver con los *observables*, esto es, las *magnitudes físicas*.

Postulado 11 (Segundo postulado del formalismo hamiltoniano)*:*

Los observables o magnitudes físicas de un sistema dinámico son funciones de $\mathrm{C}^\infty(M)$.

El resultado de una medida de un observable es el valor que toma la función que lo representa en un punto del espacio de estados M *(es decir, en un estado determinado, según el primer axioma).*

Supóngase que, de acuerdo con el axioma 10, se tiene una variedad (simpléctica o presimpléctica) (M, Ω) que constituye el espacio de estados de un sistema físico. Vamos a ver que hay una manera natural de introducir y describir la dinámica siguiendo argumentos puramente geométricos. Para ello, basta con introducir un tercer ingrediente, Así, se establece:

Postulado 12 (Tercer postulado del formalismo hamiltoniano)*:*

La dinámica de un sistema físico se obtiene dando una 1*-forma cerrada* $\alpha \in Z^1(M)$*, que se denomina* 1-forma hamiltoniana *del sistema* [20].

Postulado 13 (Cuarto postulado del formalismo hamiltoniano)*:*

Las trayectorias dinámicas del sistema son las curvas integrales del campo hamiltoniano local o global $X_\alpha \in \mathfrak{X}(M)$ *(si existe) asociado a dicha forma por la aplicación* $\hat{\Omega}$*, esto es, del campo solución del sistema de ecuaciones* [21]

$$i(X_\alpha)\Omega = \alpha$$

Estas ecuaciones se denominan ecuaciones de Hamilton *del sistema dinámico.*

Comentario:
Si el sistema es regular, $\hat{\Omega}$ es el isomorfismo canónico y la existencia (y unicidad) del campo X_α está asegurada.

Entonces se define:

Definición 50
1. *Se denomina* sistema dinámico hamiltoniano regular *(resp.* singular*) a una terna* (M, Ω, α)*, donde* (M, Ω) *es una variedad simpléctica (resp. presimpléctica) y* $\alpha \in Z^1(M)$ *es la* 1*-forma hamiltoniana del sistema.*
2. *En virtud del lema de Poincaré, para cada* $m \in M$*, existe* $U \subset M$*, con* $m \in U$*, y* $h \in \mathrm{C}^\infty(U)$ *tal que* $\alpha\mid_U = \mathrm{d}h$*, que recibe el nombre de* función hamiltoniana local *del sistema, y la terna anterior suele denominarse* sistema hamiltoniano local.

   Si α *es una forma exacta, entonces existe* $h \in \mathrm{C}^\infty(M)$ *tal que* $\alpha = \mathrm{d}h$*, que se denomina* función hamiltoniana global *del sistema, y la terna* (M, Ω, h) *se dice que es un* sistema hamiltoniano global.

Expresiones locales:

De acuerdo con los comentarios hechos al final de la sección 3.2, si (M, Ω, α) es un sistema hamiltoniano regular, en una carta simpléctica $(U; x^i, y_i)$ de la variedad M se tendría que

$$X_\alpha\mid_U = \frac{\partial h}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial h}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y_i}$$

[20] En algunos casos, la 2-forma Ω puede también contener información dinámica, como ocurre en el formalismo lagrangiano de los sistemas dinámicos lagrangianos.

[21] Estas ecuaciones pueden obtenerse a partir de un principio variacional: el *principio de mínima acción de Hamilton-Jacobi*.

es decir, las curvas integrales de X_α son la solución del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h}{\partial y_i} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial h}{\partial x^i}$$

que es la expresión en coordenadas canónicas de las ecuaciones de Hamilton.

Comentarios:

- En un sistema dinámico hamiltoniano, la función hamiltoniana representa a un observable físico que es la energía del sistema.
- La presentación que se acaba de realizar de los sistemas dinámicos se denomina *formalismo hamiltoniano* de la Mecánica debido a que las trayectorias dinámicas están dadas por las curvas integrales de un campo hamiltoniano.
- Como casos particulares, los sistemas dinámicos lagrangianos regulares $(\mathrm{T}Q, \Omega_{\mathcal{L}}, \mathrm{d}E_{\mathcal{L}})$ (o $(\mathrm{T}^*Q, \Omega, \mathrm{d}h)$, si se trata del formalismo hamiltoniano canónico) son de este tipo. El formalismo lagrangiano de estos sistemas es, pues, un formalismo hamiltoniano con ciertas características propias adicionales.

3.2.2 Constantes del movimiento

En este contexto dinámico-geométrico, la evolución dinámica de un observable cualquiera, que de acuerdo con el axioma 11 está representado por una función $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, es la variación de dicha función a lo largo de las curvas integrales del campo X_α; es decir, está dada por

$$\frac{\mathrm{d}f(q^i(t), p_i(t))}{\mathrm{d}t} = \mathrm{L}(X_\alpha)f = X_\alpha(f)$$

y si $\alpha = \mathrm{d}h$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{f, h\}$$

Entonces, se define:

Definición 51 *Sea (M, Ω, α) un sistema hamiltoniano. $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ es una* constante del movimiento *o también una* cantidad conservada *si*

$$\mathrm{L}(X_\alpha)f = 0$$

esto es, es invariante por la dinámica.

El que $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ sea una constante del movimiento del sistema (M, Ω, α) significa lo siguiente: sean $m \in M$, X_α el campo hamiltoniano del sistema, definido en un entorno de m, $\zeta\colon (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$, con $\zeta(0) = m$, una curva integral de X_α que pasa por m y $S_m = \{p \in U \mid f(p) = f(m)\}$ la superficie de nivel de f que pasa por m, entonces, si f es una constante del movimiento, se tiene que $f(\zeta(t)) = f(m)$, $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$; es decir, la imagen de ζ por f está contenida en S_m.

Una de las propiedades fundamentales de los sistemas dinámicos autónomos (esto es, independientes del tiempo, que son los que estamos considerando) es la *conservación de la energía*. Con los conceptos introducidos hasta el momento y la interpretación física que se ha dado para algunos de ellos, ya estamos en condiciones de obtener este resultado dentro del contexto geométrico en el que estamos abordando el estudio de estos sistemas.

Proposición 41 (Teorema de Conservación de la energía)*: Sea (M, Ω, α) un sistema hamiltoniano. La función hamiltoniana h (local o global), es decir, la energía, es una cantidad conservada.*

(*Dem.*) De la antisimetría de Ω y por ser una forma cerrada se obtiene que

$$\mathrm{L}(X_\alpha)h = i(X_\alpha)\mathrm{d}h = \Omega(X_\alpha, X_\alpha) = 0$$

■

Comentario:

Es de resaltar cómo las características esenciales de la forma simpléctica son fundamentales para la descripción geométrica de los sistemas físicos: su *no degeneración* permite asegurar la existencia (y unicidad) del campo hamiltoniano dinámico y, por tanto, determinar la evolución dinámica del sistema, mientras que del hecho de que sea *cerrada* y *antisimétrica* se obtiene la conservación de la energía.

Expresiones locales:

Si (M, Ω, α) es us sitema hamiltoniano regular, en una carta simpléctica $(U; x^i, y_i)$ de la variedad M se tiene que la evolución de un observable f es

$$X_\alpha(f) \mid_U = \frac{\partial h}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial h}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial y_i}$$

4 Simetrías

En este capítulo vamos hacer una introducción al estudio de las *simetrías* de los sistemas dinámicos. La forma más rigurosa y completa de abordar este estudio es mediante la teoría de las *acciones de grupos de Lie* sobre variedades simplécticas o presimplécticas. No obstante, en este capítulo, sólo se va a dar una breve introducción a este tema, y únicamente para el caso de sistemas dinámicos regulares (aunque algunos de los resultados pueden generalizarse al caso no regular).

El interés del estudio de las simetrías radica en que, como es bien conocido, la existencia de simetrías en sistemas dinámicos está relacionada con la existencia de cantidades conservadas o constantes del movimiento de dichos sistemas, lo cual permite, a su vez, simplificar la integración de las ecuaciones dinámicas aplicando métodos adecuados de reducción. Es importante mencionar, a este respecto los resultados de *Arnold* sobre *sistemas integrables* [2] y también los de *Marsden* y *Weinstein* sobre el problema de la *reducción simpléctica* [17] (ver también [18] y las referencias que se citan).

4.1 Simetrías en sistemas dinámicos hamiltonianos (regulares)

A lo largo de esta sección (M, Ω, α) designará un sistema dinámico hamiltoniano regular, y $X_\alpha \in \mathfrak{X}_{lh}(M)$ será el campo dinámico solución del sistema.

4.1.1 Simetrías dinámicas

Al hablar de simetrías de un sistema dinámico, es habitual hacer alusión al hecho de que "una simetría de un sistema dinámico deja invariantes las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del sistema". En este sentido se define:

Definición 52 *Una* simetría dinámica *del sistema es un difeomorfismo* $\Phi\colon M \longrightarrow M$ *que verifica:*

$$\Phi_* X_\alpha = X_\alpha$$

Una simetría de un sistema dinámico se puede considerar que está generada localmente por un campo vectorial, a través del grupo local de difeomorfismos generado por su flujo. En este sentido la definición anterir conduce a establecer la siguiente:

Definición 53 *Una* simetría dinámica infinitesimal *del sistema es un campo vectorial* $Y \in \mathfrak{X}(M)$ *tal que los difeomorfismos locales generados por su flujo son simetrías dinámicas del sistema; esto es,*

$$\mathrm{L}(Y)X_\alpha = [Y, X_\alpha] = 0 \tag{24}$$

Comentario:

En la definición precedente es usual relajar la condición (24) poniendo

$$[Y, X_\alpha] = gX_\alpha \ , \ g \in \mathrm{C}^\infty(M)$$

(de donde la condición original se recupera tomando $g = 0$). Ésto permite incluir entre las simetrías las transformaciones inducidas por reparametrización de las curvas integrales del campo dinámico. En adelante será ésta la condición que se manejará.

Proposición 42 *Si* $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ *son simetrías dinámicas infinitesimales, entonces* $[Y_1, Y_2]$ *es también una simetría dinámica infinitesimal.*

(*Dem.*) Usando la identidad de Jacobi, se tiene que

$$\begin{aligned}
[[Y_1,Y_2],X_\alpha] &= [Y_2,[X_\alpha,Y_1]]+[Y_1,[Y_2,X_\alpha]]=[Y_2,g_1X_\alpha]+[Y_1,g_2X_\alpha] \\
&= (\mathrm{L}(Y_2)g_1)X_\alpha+g_1[Y_2,X_\alpha]+(\mathrm{L}(Y_1)g_2)X_\alpha+g_2[Y_1,X_\alpha] \\
&= [\mathrm{L}(Y_2)g_1)+g_1g_2+\mathrm{L}(Y_1)g_2-g_2g_1]X_\alpha\equiv GX_\alpha
\end{aligned}$$

donde $g_1,g_2,G\in\mathrm{C}^\infty(M)$. ■

Un primer resultado que relaciona las simetrías de los sistemas dinámicos con las cantidades conservadas es el siguiente:

Proposición 43 *1. Si $\Phi\colon M\longrightarrow M$ es una simetría dinámica y $f\in\mathrm{C}^\infty(M)$ es una constante del movimiento del sistema, entonces Φ^*f es también constante del movimiento.*

2. Si $Y\in\mathfrak{X}(M)$ es una simetría dinámica infinitesimal y $f\in\mathrm{C}^\infty(M)$ es una constante del movimiento del sistema, entonces $\mathrm{L}(Y)f$ es también constante del movimiento.

(*Dem.*)

1. Si $\Phi\colon M\longrightarrow M$ es una simetría dinámica se tiene que

$$\mathrm{L}(X_\alpha)(\Phi^*f)=\Phi^*\,\mathrm{L}(\Phi_*X_\alpha)f=\Phi^*\,\mathrm{L}(X_\alpha)f=0$$

2. Si $Y\in\mathfrak{X}(M)$ es una simetría dinámica infinitesimal, la misma demostración sirve tomando el flujo F_t de Y. También

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}(X_\alpha)\,\mathrm{L}(Y)f &= i(X_\alpha)\mathrm{d}\,\mathrm{L}(Y)f=i(X_\alpha)\,\mathrm{L}(Y)\mathrm{d}f=\mathrm{L}(Y)\,i(X_\alpha)\mathrm{d}f-i([Y,X_\alpha])\mathrm{d}f \\
&= \mathrm{L}(Y)\,\mathrm{L}(X_\alpha)f-\mathrm{L}([Y,X_\alpha])f=-g\,\mathrm{L}(X_\alpha)f=0
\end{aligned}$$

■

4.1.2 Simetrías de Noether. Teorema de Noether

Entre las simetrías de un sistema, tienen especial relevancia, como generadores de constantes de movimiento, las siguientes:

Definición 54 $\Phi\in\mathrm{Dif}\,(M)$ *es una* simetría de tipo Noether *(también denominada* simetría de Cartan*) del sistema si:*

1. *Φ es un simplectomorfismo en M: es decir, $\Phi^*\Omega=\Omega$.*
2. *Φ deja invariante la dinámica; es decir, $\Phi^*\alpha=\alpha$.*

Comentario: Si $\alpha=\mathrm{d}h$ (local o globalmente), entonces la segunda condición es equivalente a que $\Phi^*h=h+c$ (con $c\in\mathbb{R}$) [22].

Definición 55 $Y\in\mathfrak{X}(M)$ *es una* simetría infinitesimal de tipo Noether *(también denominada* simetría de Cartan infinitesimal*) del sistema si:*

1. $\mathrm{L}(Y)\Omega=0$*; esto es,* $Y\in\mathfrak{X}_{lh}(M)$.

[22] Esto quiere decir que transforma una función hamiltoniana en otra función hamiltoniana del campo X_α. Si la función hamiltoniana está prefijada previamente (como, por ejemplo, en el caso de los formalismos lagrangiana y hamiltoniano canónico de los sistemas dinámicos lagrangianos), es habitual pedir que $\Phi^*h=h$.

2. $i(Y)\alpha = 0$

Comentarios:

- Para el caso infinitesimal, dado que, por definición, toda simetría infinitesimal de tipo Noether $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo vectorial localmente hamiltoniano, se tiene que para todo $p \in M$, existe un abierto $U_p \ni p$ y $f_Y \in \mathrm{C}^\infty(U_p)$ (única, salvo constantes) tal que $i(Y)\Omega = \mathrm{d}f_Y$, en U_p.
- Si $\alpha = \mathrm{d}h$ (local o globalmente), entonces la segunda condición se puede expresar en la forma $i(Y)\alpha = \mathrm{L}(Y)h = 0$.

Como primer resultado de importancia se tiene que:

Proposición 44 *1. Si $\Phi \in \mathrm{Dif}\,(M)$ es una simetría de tipo Noether, entonces es también una simetría dinámica.*

2. Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es una simetría infinitesimal de tipo Noether, entonces es también una simetría dinámica infinitesimal.

(*Dem.*)

1. Si $X_\alpha \in \mathfrak{X}(M)$ es solución de la dinámica entonces $0 = i(X_\alpha)\Omega - \alpha$, y por ser una simetría de tipo Noether, $\Phi^*\Omega = \Omega$ y $\Phi^*\alpha = \alpha$, por lo que:
$$0 = \Phi^*(i(X_\alpha)\Omega - \alpha) = i(\Phi_*^{-1}X_\alpha)\Phi^*\Omega - \Phi^*\alpha = i(\Phi_*^{-1}X_\alpha)\Omega - \alpha = i(\Phi_*^{-1}X_\alpha)\Omega - \alpha$$
pero por ser un sistema regular el campo vectorial solución es único, luego $\Phi_*^{-1}X_\alpha = X_\alpha$, y de ahí el resultado.
2. Por ser $Y \in \mathfrak{X}(M)$ una simetría de tipo Noether se tiene que $Y \in \mathfrak{X}_{lh}(M)$ y $i(Y)\alpha = 0$, luego
$$i([Y, X_\alpha])\Omega = \mathrm{L}(Y)\, i(X_\alpha)\Omega - i(X_\alpha)\, \mathrm{L}(Y)\Omega = \mathrm{L}(Y)\alpha = i(Y)\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\, i(Y)\alpha = 0$$
y, dado que Ω es no degenerada, se concluye que $[Y, X_\alpha] = 0$, luego Y es simetría dinámica infinitesimal.

■

Como en el caso de las simetrías dinámicas infinitesimales, es inmediato comprobar que:

Proposición 45 *Si $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ son simetrías infinitesimales de tipo Noether, entonces $[Y_1, Y_2]$ es también una simetría infinitesima de tipo Noether.*

(*Dem.*) En primer lugar se tiene que $\mathrm{L}([Y_1, Y_2])\Omega = 0$, ya que $[Y_1, Y_2] \in \mathfrak{X}_{lh}(M)$, por ser $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}_{lh}(M)$. Además
$$i([Y_1, Y_2])\alpha = \mathrm{L}(Y_1)\, i(Y_2)\alpha - i(Y_2)\, \mathrm{L}(Y_1)\alpha = -\, i(Y_2)\, i(Y_1)\mathrm{d}\alpha - i(Y_2)\mathrm{d}\, i(Y_1)\alpha = 0$$

■

Además, se tiene que:

Proposición 46 *Sea $Y \in \mathfrak{X}((T_k^1)^*Q)$ es una simetría infinitesimal de tipo Noether. Para todo $p \in M$, existe un abierto $U_p \ni p$ tal que, si $\vartheta \in \Omega^1(U_p)$ es un potencial simpléctico de Ω en U_p, entonces:*

1. Existe $\zeta_Y \in \mathrm{C}^\infty(U_p)$, que verifica que $\mathrm{L}(Y)\vartheta_Y = \mathrm{d}\zeta_Y$.

2. *Si $f_Y \in \mathrm{C}^\infty(U_p)$ es una función hamiltoniana local de Y en U_p, se tiene que*

$$f_Y = \zeta_Y - i(Y)\vartheta \qquad \text{(salvo adición de funciones constantes en } U_p) \tag{25}$$

(*Dem.*)

1. En U_p, se tiene que
$$\mathrm{d}\,\mathrm{L}(Y)\vartheta = \mathrm{L}(Y)\mathrm{d}\vartheta = \mathrm{L}(Y)\Omega = 0$$
de modo que $\mathrm{L}(Y)\vartheta$ es una forma cerrada. Entonces, por el Lema de Poincaré, existe $\zeta_Y \in \mathrm{C}^\infty(U_p)$, verificando que $\mathrm{L}(Y)\vartheta = \mathrm{d}\zeta_Y$, en U_p.

2. Como $i(Y)\Omega = \mathrm{d}f_Y$, en U_p, se obtiene que
$$\mathrm{d}\zeta_Y = \mathrm{L}(Y)\vartheta = \mathrm{d}\,i(Y)\vartheta + i(Y)\mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}\,i(Y)\vartheta + i(Y)\Omega = \mathrm{d}\{i(Y)\vartheta + f_Y\}$$
y de ahí el resultado.

■

Finalmente, como resultado fundamental relacionado con las simetrías de tipo Noether se tiene la siguiente versión geométrica del clásico *teorema de Noether*:

Teorema 14 (de Noether). *Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es una simetría infinitesimal de tipo Noether, entonces su función hamiltoniana (local o global) $f_Y = \zeta_Y - i(Y)\vartheta$ es una cantidad conservada; esto es,* $\mathrm{L}(X_\alpha)f_Y = 0$.

(*Dem.*) En efecto, pues

$$\mathrm{L}(X_\alpha)f_Y = i(X_\alpha)\mathrm{d}f_Y = i(X_\alpha)\,i(Y)\Omega = -\,i(Y)\,i(X_\alpha)\Omega = -\,i(Y)\alpha = 0$$

■

Este resultado tiene una gran relevancia, ya que asocia a cada simetría de Noether una constante del movimiento, ésto es, una integral primera del sistema de ecuaciones diferenciales dinámicas.

En general, para simetrías que no son de tipo Noether no hay una manera directa de obtener constantes del movimiento, salvo para casos muy particulares como el siguiente (ver también, p. ej., [14] y [15]):

Teorema 15 *Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es una simetría dinámica infinitesimal tal que $i(Y)\alpha \neq 0$, entonces la función $f = i(Y)\alpha$ es una cantidad conservada..*

(*Dem.*) En efecto, dado que $\mathrm{d}\alpha = 0$ y $i(X_\alpha)\alpha = i(X_\alpha)\alpha\, i(X_\alpha)\Omega = 0$, se tiene que

$$\mathrm{L}(X_\alpha)\,i(Y)\alpha = i([X_\alpha, Y])\alpha + i(Y)\,\mathrm{L}(X_\alpha)\alpha = g\,i(X_\alpha)\alpha + i(Y)\,i(X_\alpha)\mathrm{d}\alpha + i(Y)\mathrm{d}\,i(X_\alpha)\alpha = i(Y)\mathrm{d}\,i(X_\alpha)\alpha = 0$$

■

4.2 Simetrías en sistemas dinámicos lagrangianos (regulares)

Una situación especialmente interesante se presenta cuando los sistemas dinámicos en consideración tienen como espacios de fases $M = \mathrm{T}Q$ ó $M = \mathrm{T}^*Q$ (como, p. ej., ocurre en los formalismos lagrangiano y hamiltoniano canónico dual de los sistemas lagrangianos). En estos casos existe un potencial simpléctico distinguido: la 1-forma lagrangiana $\Theta_{\mathcal{L}} \in \Omega^1(\mathrm{T}Q)$ y la 1-forma canónica $\Theta \in \Omega^1(\mathrm{T}^*Q)$.

Además, en dichos casos, las simetrías de los correspondientes sistemas dinámicos acostumbran a ser levantamientos de difeomorfismos o campos vectoriales de la variedad base Q. De este modo, como ya se vió, en el segundo caso queda automáticamente asegurada la invariancia de la formas canónicas Θ y Ω de T^*Q, mientras que en el primero son las estructuras geométricas canónicas del fibrado tangente las que son invariantes.

Todo ello lleva a introducir nuevos tipos de simetrías en estos casos, cuyas características vamos a estudiar a continuación.

4.2.1 Formalismo hamiltoniano canónico

Considérese un sistema hamiltoniano canónico $(\mathrm{T}^*Q, \Omega, \mathrm{d}h)$, y sea $X_h \in \mathfrak{X}_{lh}(\mathrm{T}^*Q)$ el campo hamiltoniano solución del sistema.

Por supuesto, todo lo dicho para sistemas dinámicos hamiltonianos en general es también válido en este caso. Pero, además, se pueden introducir nuevos conceptos de simetría, y así, dentro de los tipos de simetrías introducidos hasta el momento, se pueden considerar los siguientes casos particulares:

Definición 56 *Una simetría dinámica $\Phi \in \mathrm{Dif}\,(\mathrm{T}^*Q)$ del sistema hamiltoniano canónico es una* simetría dinámica natural *si existe $\varphi \in \mathrm{Dif}\,(Q)$ tal que $\Phi = \mathrm{T}^*\varphi$ (es decir, Φ es el levantamiento canónico de algún difeomorfismo de Q).*

Definición 57 *Una simetría dinámica infinitesimal $Y \in \mathfrak{X}(Q)$ del sistema hamiltoniano canónico es una* simetría dinámica natural infinitesimal *si existe $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ tal que $Y = Z^*$ (es decir, Y es el levantamiento canónico de algún campo vectorial en Q* [23]*).*

Si $Z^* \in \mathfrak{X}_h(\mathrm{T}^*Q)$ una simetría dinámica infinitesimal natural del sistema, entonces $Z^* \in \mathfrak{X}_h(\mathrm{T}^*Q)$ y la función hamiltoniana global de Z^* es (salvo constantes aditivas) $f_Z = i(Z^*)\Theta$ (tal como se vió en la proposición 26).

Análogamente, para simetrías de tipo Noether, se tiene:

Definición 58 *Un difeomorfismo $\Phi \in \mathrm{Dif}\,(\mathrm{T}^*Q)$ es una* simetría natural de tipo Noether *si:*

1. *Existe un difeomorfismo $\varphi \in \mathrm{Dif}\,(Q)$ tal que $\Phi = \mathrm{T}^*\varphi$.*
2. $\Phi^*\alpha = (\mathrm{T}^*\varphi)^*\alpha = \alpha$.

Definición 59 *Un campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}^*Q)$ es una* simetría natural infinitesimal de tipo Noether *si:*

1. *Existe un campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ tal que $Y = Z^*$.*
2. $i(Y)\alpha = i(Z^*)\alpha = 0$.

Por otra parte, hay que recordar que (T^*Q, Ω) es una variedad simpléctica exacta y que un potencial simpléctico de Ω es la 1-forma canónica $-\Theta \in \Omega^1(\mathrm{T}^*Q)$. Ello lleva a introducir el siguiente tipo particular de simetrías de tipo Noether para el sistema hamiltoniano canónico $(\mathrm{T}^*Q, \Omega, \mathrm{d}h)$:

Definición 60 *Una simetría de tipo Noether es* exacta *si $\Phi^*\Theta = \Theta$.*

Definición 61 *Una simetría infinitesimal de tipo Noether es* exacta *si $\mathrm{L}(Y)\Theta = 0$.*

[23] A veces se denominan simetrías naturales al difeomorfismo φ y al campo vectorial Z.

Observar que para simetrías de tipo Noether infinitesimales exactas también se tiene que sus funciones hamiltonianas locales se pueden expresar simplemente como $f_Y = i(Y)\Theta$ (ver proposición 46) .

Por supuesto, toda simetría natural (infinitesimal) de tipo Noether es una simetría dinámica natural (infinitesimal). Además, dado que todo levantamiento canónico preserva las formas canónicas $\Theta \in \Omega^1(\mathrm{T}^*Q)$ y $\Omega \in \Omega^2(\mathrm{T}^*Q)$ (proposiciones 23 y 27), resulta que:

Proposición 47 *Toda simetría natural (infinitesimal) de tipo Noether es una simetría exacta (infinitesimal) de tipo Noether.*

A modo de resumen, la tabla siguiente recoge la relación entre los diversos tipos de simetrías de los sistemas hamiltonianos canónicos:

$$
\begin{array}{ccc}
\{\text{ simetrías naturales de tipo Noether }\} & \subset & \{\text{ simetrías dinámicas naturales }\} \\
\cap & & \\
\{\text{ simetrías exactas de tipo Noether }\} & & \cap \\
\cap & & \\
\{\text{simetrías de tipo Noether}\} & \subset & \{\text{simetrías dinámicas}\}
\end{array}
$$

4.2.2 Formalismo lagrangiano: simetrías lagrangianas y teorema de Noether

Sea $(\mathrm{T}Q, \Omega_{\mathcal{L}}, \mathrm{d}E_{\mathcal{L}})$ un sistema dinámico lagrangiano (regular), y $X_{\mathcal{L}} \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ el campo vectorial de Euler-Lagrange solución del sistema.

También en esta situación todos los conceptos y resultados sobe simetrías establecidos a lo largo de este capítulo son válidos en relación al sistema hamiltoniano $(\mathrm{T}Q, \Omega_{\mathcal{L}}, \mathrm{d}E_{\mathcal{L}})$. De este modo se introducirían las nociones de *simetría dinámica lagrangiana (infinitesimal)*, de *simetría lagrangiana (infinitesimal) de tipo Noether* y de *simetría lagrangiana (infinitesimal) de tipo Noether exacta*, asi como sus propiedades y relaciones entre ellas, incluyendo el correspondiente teorema de Noether.

Pero, además, el estudio de las simetrías en el formalismo lagrangiano de los sistemas dinámicos lagrangianos presenta una serie de matices que conviene señalar.

En primer lugar, al igual que ya acontecía en el formalismo hamiltoniano canónico, los levantamientos canónicos de difeomorfismos y campos vectoriales preservan las estructuras canónicas de $\mathrm{T}Q$ (proposición 16). Consecuentemente, es posible probar el siguiente resultado:

Proposición 48 *1. Sea $\varphi\colon Q \longrightarrow Q$ un difeomorfismo y $\Phi = \mathrm{T}\varphi$ su levantamiento canónico a $\mathrm{T}Q$. Entonces:*

$$\Phi^*\Theta_{\mathcal{L}} = \Theta_{\Phi^*\mathcal{L}} \quad , \quad \Phi^*\Omega_{\mathcal{L}} = \Omega_{\Phi^*\mathcal{L}} \quad , \quad \Phi^*E_{\mathcal{L}} = E_{\Phi^*\mathcal{L}}$$

2. Sea $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ y su levantamiento canónico Z^C a $\mathrm{T}Q$. Entonces

$$\mathrm{L}(Z^C)\Theta_{\mathcal{L}} = 0 \quad , \quad \mathrm{L}(Z^C)\Omega_{\mathcal{L}} = 0 \quad , \quad \mathrm{L}(Z^C)E_{\mathcal{L}} = 0$$

(*Dem.*) Es una consecuencia directa de la proposición 16, y de las definiciones de $\Theta_{\mathcal{L}}$, $\Omega_{\mathcal{L}}$ y $E_{\mathcal{L}}$. Ene efecto:

1. Para $\Phi = \mathrm{T}\varphi$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
\Phi^*\Theta_{\mathcal{L}} &= \Phi^*(\mathrm{d}\mathcal{L} \circ J) = \mathrm{d}(\Phi^*\mathcal{L}) \circ J) = \Theta_{\Phi^*\mathcal{L}} \\
\Phi^*\Omega_{\mathcal{L}}) &= \Phi^*(-\mathrm{d}\Theta_{\mathcal{L}}) = -\mathrm{d}\Phi^*\Theta_{\mathcal{L}} = \Omega_{\Phi^*\mathcal{L}} \\
\Phi^*E_{\mathcal{L}} &= \Phi^*(\Delta(\mathcal{L}) - \mathcal{L}) = \Delta(\Phi^*\mathcal{L}) - \Phi^*\mathcal{L} = E_{\Phi^*\mathcal{L}}
\end{aligned}
$$

2. Se demuestra tomando los grupos uniparamétricos de difeomorfismos generados por los flujos de Z y Z^C, y a partir del apartado anterior.

■

Sin embargo, las formas lagrangianas $\Theta_{\mathcal{L}}$ y $\Omega_{\mathcal{L}}$ no son estructuras canónicas de $\mathrm{T}Q$, ya que dependen de la elección de la función lagrangiana $\mathcal{L}$ y, por consiguiente, no son necesariamente invariantes por dichos levantamientos. Como consecuencia se establecen las siguientes definiciones:

Definición 62 *Un difeomorfismo* $\Phi\colon \mathrm{T}Q \longrightarrow \mathrm{T}Q$ *es una* simetría dinámica lagrangiana natural *si:*

1. *Existe un difeomorfismo* $\varphi\colon Q \longrightarrow Q$ *tal que* $\Phi = \mathrm{T}\varphi$.
2. $\Phi_* X_{\mathcal{L}} = X_{\mathcal{L}}$.

Definición 63 *Un campo vectorial* $Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ *es una* simetría lagrangiana dinámica natural infinitesimal *si:*

1. *Existe* $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ *tal que* $Y = Z^C$.
2. $[Y, X_{\mathcal{L}}] = [Z^C, X_{\mathcal{L}}] = 0$ *(o, más genéricamente,* $[Y, X_{\mathcal{L}}] = [Z^C, X_{\mathcal{L}}] = gX_{\mathcal{L}}$*, para alguna función* $g \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}Q)$*).*

Y para las simetrías de tipo Noether lagrangianas se tiene:

Definición 64 *Un difeomorfismo* $\Phi\colon \mathrm{T}Q \longrightarrow \mathrm{T}Q$ *es una* simetría lagrangiana natural de tipo Noether *si existe un difeomorfismo* $\varphi\colon Q \longrightarrow Q$ *tal que* $\Phi = \mathrm{T}\varphi$ *y satisface:*

1. $\Phi^*\Omega_{\mathcal{L}} = (\mathrm{T}\varphi)^*\Omega_{\mathcal{L}} = \Omega_{\mathcal{L}}$.
2. $\Phi^* E_{\mathcal{L}} = (\mathrm{T}\varphi)^* E_{\mathcal{L}} = E_{\mathcal{L}} + c$ *(*$c \in \mathbb{R}$*)* [24].

Definición 65 *Un campo vectorial* $Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ *es una* simetría lagrangiana natural infinitesimal de tipo Noether *si existe* $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ *tal que* $Y = Z^C$ *y satisface:*

1. $\mathrm{L}(Y)\Omega_{\mathcal{L}} = \mathrm{L}(Z^C)\Omega_{\mathcal{L}} = 0$.
2. $\mathrm{L}(Y)E_{\mathcal{L}} = \mathrm{L}(Z^C)E_{\mathcal{L}} = 0$.

Evidentemente, toda simetría lagrangiana natural (infinitesimal) de tipo Noether es una simetría dinámica lagrangiana (infinitesimal) natural.

Finalmente, como caso particular se tiene:

Definición 66 *Una simetría lagrangiana de tipo Noether es* exacta *si* $\Phi^*\Theta_{\mathcal{L}} = \Theta_{\mathcal{L}}$.

Definición 67 *Una simetría lagrangiana infinitesimal de tipo Noether es* exacta *si* $\mathrm{L}(Y)\Theta_{\mathcal{L}} = 0$.

En estas circunstancias, es posible enunciar la versión geométrica lagrangiana del teorema de Noether. En primer lugar, debe observarse que, si $Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ es una simetría lagrangiana natural infinitesimal de tipo Noether, entonces la proposicion 46 es válida para este tipo de simetrías. Así, para todo $p \in \mathrm{T}Q$, existe un abierto $U_p \ni p$ y $f_Y \in \mathrm{C}^\infty(U_p)$, que es única salvo adición de funciones constantes, tal que

$$i(Z^C)\Omega_{\mathcal{L}} = \mathrm{d}f_Y \qquad (\text{en } U_p) \tag{26}$$

[24] Es habitual pedir que $\Phi^* E_{\mathcal{L}} = E_{\mathcal{L}}$.

Además existe $\zeta_Y \in \mathrm{C}^\infty(U_p)$, definida por $\mathrm{L}(Z^C)\Theta_{\mathcal{L}} = \mathrm{d}\zeta_Y$, en U_p, y tal que

$$
\begin{aligned}
f_Y &= \zeta_Y - i(Z^C)\Theta_{\mathcal{L}} = \zeta_Y - \Theta_{\mathcal{L}}(Z^C) = \zeta_Y - \mathrm{d}\mathcal{L} \circ J(Z^C) \\
&= \zeta_Y - \mathrm{d}\mathcal{L}(Z^V) = \zeta_Y - i(Z^V)\mathrm{d}\mathcal{L} = \zeta_Y - Z^V(\mathcal{L})
\end{aligned}
\tag{27}
$$

(salvo adición de funciones constantes en U_p). Entonces:

Teorema 16 (de Noether lagrangiano): *Si $Y = Z^C \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ (con $Z \in \mathfrak{X}(Q)$) es una simetría lagrangiana natural infinitesimal de tipo Noether, entonces $f_Y = \zeta_Y - Z^V(\mathcal{L})$ es una cantidad conservada; esto es,* $\mathrm{L}(X_{\mathcal{L}})f_Y = 0$.

(*Dem.*) La demostración es la del teorema 14, teniendo en cuenta (26) and (27). ■

4.2.3 Formalismo lagrangiano: simetrías de la lagrangiana y teorema de Noether

Es evidente que si $\Phi \in \mathrm{Dif}(\mathrm{T}Q)$ (resp. $Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$) es un levantamiento de algún difeomorfismo (resp. de algún campo vectorial) de Q a $\mathrm{T}Q$ que, además, deja invariante la función lagrangiana del sistema, también dejará invariantes la forma simpléctica $\Omega_{\mathcal{L}}$, la energía lagrangiana $E_{\mathcal{L}}$ y, consecuentemente, el campo vectorial solución $X_{\mathcal{L}}$ (esto es, las ecuaciones de Euler-Lagrange). Con ello las condiciones de las definiciones 64 y 65 estarían aseguradas. No obstante, esta exigencia es demasiado fuerte, ya que existen funciones lagrangianas que, siendo diferentes, dan lugar a las mismas formas $\Omega_{\mathcal{L}}$ y a las mismas ecuaciones de Euler-Lagrange. Ello da lugar a la siguiente definición:

Definición 68 *Dos funciones lagrangianas $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}Q)$ son* equivalentes gauge *si*

$$\Omega_{\mathcal{L}_1} = \Omega_{\mathcal{L}_2} \quad \text{y} \quad X_{\mathcal{L}_1} = X_{\mathcal{L}_2}$$

Las lagrangianas equivalentes gauge se pueden caracterizar también del siguiente modo:

Proposición 49 *Dos funciones lagrangianas regulares $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}Q)$ son* equivalentes gauge *si*

$$\Omega_{\mathcal{L}_1} = \Omega_{\mathcal{L}_2} \quad , \quad E_{\mathcal{L}_1} = E_{\mathcal{L}_2} + c \ (\ c \in \mathbb{R})$$

(*Dem.*) Hay que probar que si $\Omega_{\mathcal{L}_1} = \Omega_{\mathcal{L}_2}$, entonces $X_{\mathcal{L}_1} = X_{\mathcal{L}_2}$ es equivalente a $E_{\mathcal{L}_1} = E_{\mathcal{L}_2} + c$.

Si $X_{\mathcal{L}_1} = X_{\mathcal{L}_2}$, entonces $J(X_{\mathcal{L}_1}) = J(X_{\mathcal{L}_2}) = \Delta$, y

$$0 = i(X_{\mathcal{L}_1})\Omega_{\mathcal{L}_1} - \mathrm{d}E_{\mathcal{L}_1} = i(X_{\mathcal{L}_2})\Omega_{\mathcal{L}_2} - \mathrm{d}E_{\mathcal{L}_1}$$

lo que implica necesariamente que $\mathrm{d}E_{\mathcal{L}_1} = \mathrm{d}E_{\mathcal{L}_2}$ y, por tanto, que $E_{\mathcal{L}_1} = E_{\mathcal{L}_2} + c$.

Recíprocamente, si $\Omega_{\mathcal{L}_1} = \Omega_{\mathcal{L}_2}$, y $E_{\mathcal{L}_1} = E_{\mathcal{L}_2} + c$, entonces

$$0 = i(X_{\mathcal{L}_1})\Omega_{\mathcal{L}_1} - \mathrm{d}E_{\mathcal{L}_1} = i(X_{\mathcal{L}_1})\Omega_{\mathcal{L}_2} - \mathrm{d}E_{\mathcal{L}_2}$$

luego $X_{\mathcal{L}_1} = X_{\mathcal{L}_2}$, dado que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son lagrangianas regulares. ■

El siguiente resultado especifica cómo son las lagrangianas equivalentes gauge (ver [1], p 216):

Proposición 50 *Dos funciones lagrangianas regulares $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}Q)$ son* equivalentes gauge *si, y sólo si, $L_2 = L_1 + \hat{\beta} + c$ ($c \in \mathbb{R}$), donde la función $\hat{\beta} \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}Q)$ está definida por*

$$
\begin{array}{cccc}
\hat{\beta} : & \mathrm{T}Q & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& (q,u) & \mapsto & \beta_q(u)
\end{array}
\tag{28}
$$

siendo $\beta \in \Omega^1(Q)$ una 1-forma cerrada en Q.

(*Dem.*) ($\Longrightarrow$) Para todo punto $(q,u) \in \mathrm{T}Q$, sean $\mathcal{L}_q \colon \mathrm{T}_qQ \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{FL}_q \colon \mathrm{T}_qQ \longrightarrow \mathrm{T}^*_qQ$ las restricciones de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{FL}$ a la fibra sobre $q \in Q$. Un simple cálculo en coordenadas muestra que para la función $E_\mathcal{L}$ y la forma $\Theta_\mathcal{L}$ asociadas a una lagrangiana $\mathcal{L}$ se cumple que

$$E_{\mathcal{L}_q}(u) = (\mathcal{FL}_q(u))(u) - \mathcal{L}_q(u) \tag{29}$$
$$\theta_\mathcal{L}(q,u) = \mathcal{FL}_q(u) \tag{30}$$

De (29), la condición $E_{\mathcal{L}_1} = E_{\mathcal{L}_2} + c$ significa que

$$\mathcal{L}_{2q}(u) - \mathcal{L}_{1q}(u) = (\mathcal{FL}_{2q}(u) - \mathcal{FL}_{1q}(u))(u) + c. \tag{31}$$

Además, la condición $\Omega_{\mathcal{L}_2} = \Omega_{\mathcal{L}_1}$ lleva a que

$$0 = \Omega_{\mathcal{L}_2} - \Omega_{\mathcal{L}_1} = -\mathrm{d}(\Theta_{\mathcal{L}_2} - \Theta_{\mathcal{L}_1})$$

ésto es, $\Theta_{\mathcal{L}_2} - \Theta_{\mathcal{L}_1} \equiv \beta$ es una 1-forma cerrada y, además, como $\Theta_{\mathcal{L}_2}$ y $\Theta_{\mathcal{L}_1}$ son formas τ_Q-semibásicas, β es también τ_Q-semibásica [25]. Pero toda forma cerrada y τ_Q-semibásica es una forma τ_Q-básica [26] necesariamente, ya que

$$\mathrm{L}(V)\beta = \mathrm{d}\, i(V)\beta + i(V)\mathrm{d}\beta = 0 \ , \ \text{para todo } V \in \mathfrak{X}^V(\mathrm{T}Q) \ .$$

Entonces, de (30) se tiene que $\mathcal{FL}_{2q}(u) - \mathcal{FL}_{1q}(u)$ es independiente de u. De este modo se tiene bien definida la 1-forma

$$\beta_q := \mathcal{FL}_{2q}(u) - \mathcal{FL}_{1q}(u) \ , \ (\text{para } u \in \mathrm{T}_qQ,\ q \in Q)$$

y la función (28). Finalmente, de (31) se concluye que $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \hat\beta + c$.

Ahora, como $\mathcal{FL}_2 = \mathcal{FL}_1 + \beta$, se obtiene que

$$\Omega_{\mathcal{L}_2} = \mathcal{FL}_2^*\Omega = \mathcal{FL}_1^*\Omega + \beta^*\Omega = \Omega_{\mathcal{L}_1} + \beta^*\Omega$$

y como $\Omega_{\mathcal{L}_2} = \Omega_{\mathcal{L}_1}$, ésto implica que

$$0 = \beta^*\Omega = -\beta^*\mathrm{d}\Theta = -\mathrm{d}\beta^*\Theta = -\mathrm{d}\beta$$

ya que $\Theta \in \Omega^1(T^*Q)$ es la 1-forma tautológica en T^*Q (es decir, que en cada punto $(q,\alpha_q) \in \mathrm{T}^*Q$ es $\Theta(q,\alpha_q) = \alpha_q$). Así pués β es cerrada.

($\Longleftarrow$) Es fácil obtener que, en una carta de coordenadas naturales de $\mathrm{T}Q$, dado que β es cerrada, su expresión local debe ser

$$\beta = \beta_i \mathrm{d}q^i = \frac{\partial g}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i \ ,$$

para alguna función local g; entonces la expresión local de la función $\hat\beta$ es

$$\hat\beta = \frac{\partial g}{\partial q^i} v^i \ .$$

De aquí el recíproco se obtiene con un simple cálculo en coordenadas. ■

Teniendo todo esto presente, se puede introducir la siguiente:

Definición 69 *Una* simetría gauge de la lagrangiana *es un difeomorfismo* $\Phi \colon \mathrm{T}Q \longrightarrow \mathrm{T}Q$ *tal que* $\mathcal{L}$ *y* $\Phi^*\mathcal{L}$ *son lagrangianas equivalentes gauge; esto es,* $\Phi^*\mathcal{L} = \mathcal{L} + \hat\beta$ *(salvo constantes), donde* $\hat\beta \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}Q)$ *es la función definida en la proposición 50.*

Definición 70 *Una* simetría gauge infinitesimal de la lagrangiana *es un campo vectorial* $Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ *tal que los grupos uniparamétricos de difeomorfismos generados por su flujo son simetrías gauge de la lagrangiana.*

Como caso especial de este tipo de simetrías se tiene:

[25] Ésto significa que $i(V)\beta = 0$, para todo campo vectorial que sea vertical $V \in \mathfrak{X}^V(\mathrm{T}Q)$.

[26] Ésto significa que $i(V)\beta = 0$ y $\mathrm{L}(V)\beta = 0$, para todo campo vectorial que sea vertical $V \in \mathfrak{X}^V(\mathrm{T}Q)$.

Definición 71 *Una* simetría estricta de la lagrangiana *es un difeomorfismo* $\Phi\colon \mathrm{T}Q \longrightarrow \mathrm{T}Q$ *tal que* $\Phi^*\mathcal{L} = \mathcal{L} + c$ *(*$c \in \mathbb{R}$*).*

Definición 72 *Una* simetría estricta infinitesimal de la lagrangiana *es un campo vectorial* $Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ *tal que los grupos uniparamétricos de difeomorfismos generados por su flujo son simetrías estrictas de la lagrangiana.*

Y, en particular, se definen:

Definición 73

1. *Una simetría gauge de la lagrangiana* $\Phi\colon \mathrm{T}Q \longrightarrow \mathrm{T}Q$ *es* natural *si existe un difeomorfismo* $\varphi\colon Q \longrightarrow Q$ *tal que* $\Phi = \mathrm{T}\varphi$.
2. *Una simetría estricta de la lagrangiana* $\Phi\colon \mathrm{T}Q \longrightarrow \mathrm{T}Q$ *es* natural *si existe un difeomorfismo* $\varphi\colon Q \longrightarrow Q$ *tal que* $\Phi = \mathrm{T}\varphi$.

Definición 74

1. *Una simetría gauge infinitesimal de la lagrangiana* $Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ *es* natural *si existe un campo vectorial* $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ *tal que* $Y = Z^C$.
2. *Una simetría estricta infinitesimal de la lagrangiana* $Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ *es* natural *si existe un campo vectorial* $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ *tal que* $Y = Z^C$.

Comentario:

Una simetría gauge de la lagrangiana $\Phi\colon \mathrm{T}Q \longrightarrow \mathrm{T}Q$ no es necesariamente una simetría lagrangiana de tipo Noether ya que, en general, $\Phi^*\Omega_{\mathcal{L}} \neq \Omega_{\Phi^*\mathcal{L}}$ y $\Phi^*E_{\mathcal{L}} \neq E_{\Phi^*\mathcal{L}}$, como pone de manifiesto un simple cálulo en coordenadas. Tampoco es, por supuesto, una simetría dinámica lagrangiana. No obstante, se tiene la siguiente relación:

Proposición 51 $\Phi\colon T^1_kQ \longrightarrow T^1_kQ$ *es una simetría lagrangiana natural de tipo Noether si, y sólo si, es una simetría gauge natural de la lagrangiana.*

(*Dem.*) Si $\Phi = \mathrm{T}\varphi$ para algún difeomorfismo $\varphi\colon Q \longrightarrow Q$, de acuerdo con el lema 48) se tiene que

$$\Phi^*(\Omega_L)_A = (\Omega_{\Phi^*L})_A \quad , \quad \Phi^*E_L = E_{\Phi^*L}$$

y entonces

$$\left.\begin{array}{rcl} \Phi^*(\Omega_L)_A & = & (\Omega_L)_A \\ \Phi^*E_L & = & E_L \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (\Omega_{\Phi^*L})_A & = & (\Omega_L)_A \\ E_{\Phi^*L} & = & E_L + c \ (\ c \in \mathbb{R}) \end{array}\right.$$

esto es, Φ es una simetría lagrangiana natural de tipo Noether si, y sólo si, L y Φ^*L son lagrangiana equivalentes gauge y, por tanto, Φ es una simetría gauge natural de la lagrangiana. ■

Este resultado se cumple igualmente para las simetrías infinitesimales, como se demuestra tomando los flujos de los campos que las generan.

Finalmente, se puede establecer una versión del teorema de Noether para el caso particular de simetrías estrictas de la lagrangiana (infinitesimales):

Theorem 1 (de Noether clásico para sistemas lagrangianos*). Sea* $Y = Z^C \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ *(con* $Z \in \mathfrak{X}(Q)$*) una simetría estricta natural infinitesimal de la lagrangiana. Entonces* $\tilde{f} := Z^V(\mathcal{L})$ *es una cantidad conservada; esto es,* $\mathrm{L}(X_{\mathcal{L}})\tilde{f} = 0$.

(*Dem.*) Dado que toda simetría estricta natural infinitesimal de la lagrangiana. es una simetría gauge natural de la lagrangiana y, por tanto, de acuerdo con la proposición precedente, es también una simetría lagrangiana natural de tipo Noether, el resultado es consecuencia directa del teorema 16, ya que $\zeta_Y = \mathrm{L}(Y)\Theta_{\mathcal{L}} = \mathrm{L}(Z^C)\Theta_{\mathcal{L}} = 0$. ■

En la tabla siguiente se recoge la relación entre los diversos tipos de simetrías para el formalismo lagrangiano de los sistemas lagrangianos:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\left\{\begin{array}{c}\text{Simetrías}\\ \text{estrictas}\\ \text{de la lagrangiana}\end{array}\right\} & \supset & \left\{\begin{array}{c}\text{Simetrías}\\ \text{naturales}\\ \text{estrictas}\\ \text{de la lagrangiana}\end{array}\right\} & & & & \\
\cap & & \cap & & & & \\
\left\{\begin{array}{c}\text{Simetrías}\\ \text{gauge}\\ \text{de la lagrangiana}\end{array}\right\} & \supset & \left\{\begin{array}{c}\text{Simetrías}\\ \text{gauge}\\ \text{naturales}\\ \text{de la lagrangiana}\end{array}\right\} & = & \left\{\begin{array}{c}\text{Simetrías}\\ \text{lagrangianas}\\ \text{naturales}\\ \text{de tipo Noether}\end{array}\right\} & \subset & \left\{\begin{array}{c}\text{Simetrías}\\ \text{dinámicas}\\ \text{lagrangianas}\\ \text{naturales}\end{array}\right\} \\
 & & & & \cap & & \\
 & & & & \left\{\begin{array}{c}\text{Simetrías}\\ \text{lagrangianas}\\ \text{exactas}\\ \text{de tipo Noether}\end{array}\right\} & & \cap \\
 & & & & \cap & & \\
 & & & & \left\{\begin{array}{c}\text{Simetrías}\\ \text{lagrangianas}\\ \text{de tipo Noether}\end{array}\right\} & \subset & \left\{\begin{array}{c}\text{Simetrías}\\ \text{dinámicas}\\ \text{lagrangianas}\end{array}\right\}
\end{array}
$$

5 Formulación variacional

5.1 Formulación variacional del formalismo lagrangiano

5.1.1 Funcional asociado a un problema lagrangiano

Sea $(\mathrm{T}Q, \mathcal{L})$ un sistema dinámico lagrangiano. Se va a definir, en primer lugar, un funcional asociado al problema lagrangiano establecido por este sistema.

Para ello, en $\mathbb{R}$, se considera el elemento de volumen natural $\mathrm{d}t$. Si $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow Q$ es una curva, se designará por $\tilde{\gamma}\colon [a,b] \longrightarrow \mathrm{T}Q$ su subida canónica al fibrado tangente. Considérense las variedades $\mathbb{R}\times \mathrm{T}Q$, $\mathbb{R}\times Q$ y $\mathbb{R}$ con las proyecciones naturales entre ellas

$$\mathbb{R}\times \mathrm{T}Q \xrightarrow{id\times\tau_Q} \mathbb{R}\times Q \xrightarrow{\rho} \mathbb{R}$$

(se seguirá designando por $\tilde{\gamma}$ a la subida canónica de una curva γ a $\mathbb{R}\times \mathrm{T}Q$). Si α es una 1-forma en $\mathbb{R}\times \mathrm{T}Q$, tiene sentido definir

$$\int_{\tilde{\gamma}} \alpha = \int_a^b \tilde{\gamma}^*\alpha$$

ya que $\tilde{\gamma}^*\alpha$ es una 1-forma en $\mathbb{R}$.

Definición 75 *Sea la* 1*-forma* $\mathcal{L}\mathrm{d}t \in \Omega^1(\mathbb{R}\times \mathrm{T}Q)$*, donde* $\mathrm{d}t$ *es la* 1*-forma de volumen natural en* $\mathbb{R}$ *que se sube por trasposición a* $\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}$*. Dada la curva* $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow Q$*, se denomina* forma de acción *o también* acción de $\mathcal{L}$ a lo largo de γ *al funcional*

$$L(\gamma) := \int_{\tilde{\gamma}} \mathcal{L}\mathrm{d}t$$

definido sobre las curvas $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow Q$*.*

Comentario:

Se considera habitualmente que $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow Q$ está definida en un intervalo cerrado $[a,b]$ y, si hace falta, se extiende a toda la recta de manera que los puntos exteriores de $[a,b]$ tengan como imagen los extremos de la curva. En tal caso, la función γ no es, en general, diferenciable en los extremos, lo que no da problemas al hacer la integral, mientras que la extensión de γ a $\tilde{\gamma}$ se efectúa desde el interior del intervalo.

5.1.2 Problema variacional de Hamilton

El problema variacional consiste en optimizar un funcional definido sobre curvas. En principio, el problema que se plantea es el de hallar mínimos globales. En realidad, el problema que se resuelve es el cálculo de mínimos locales, esto es, se elegirán curvas γ en Q tales que pequeñas variaciones sobre ellas no varían el valor de $L(\gamma)$ en primera aproximación, según se precisará enseguida.

El planteo y resolución del problema variacional es como sigue:

Definición 76 *Sea* $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow Q$ *una curva con* $\gamma(a) = P_0$*,* $\gamma(b) = P_1$*. Una* variación *de* γ *es una aplicación diferenciable*

$$\mu\colon (-\epsilon,\epsilon)\times[a,b] \longrightarrow Q$$

tal que

1. $\mu(0,t) = \gamma(t)$*,* $t\in[a,b]$*.*
2. $\mu(s,a) = P_0$*,* $\mu(s,b) = P_1$*,* $s\in(-\epsilon,\epsilon)$*.*

Habitualmente se designa por μ_s a la curva definida en $[a,b]$ por $\mu_s\colon [a,b] \longrightarrow Q$ tal que $\mu_s(t) = \mu(s,t)$.

Obsérvese que cada una de las curvas μ_s se puede subir a $\mathrm{T}Q$ y $\mathbb{R}\times\mathrm{T}Q$. Dichas subidas se designarán indistintamente por $\tilde{\mu}_s$ y constituyen variaciones de las correspondientes $\tilde{\gamma}$.

Sea, ahora, $X \in \mathfrak{X}(Q)$ un campo vectorial con $X(P_0)=0$, $X(P_1)=0$. Si F_s es un grupo uniparamétrico local de X, se puede obtener una variación de la curva γ haciendo

$$\mu(s,t) = (F_s \circ \gamma)(t) = F_s(\gamma(t))$$

Obsérvese que $F_s\colon Q \longrightarrow Q$ es un difeomorfismo que, a su vez, induce otro $\mathrm{T}F_s\colon \mathrm{T}Q \longrightarrow \mathrm{T}Q$, que es ampliable a $\mathbb{R}$ por la identidad. Con ello se obtienen sendos campos $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ y $\dfrac{\partial}{\partial t} + \tilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}\times\mathrm{T}Q)$ que se denominan subidas canónicas de X a $\mathrm{T}Q$ y $\mathbb{R}\times\mathrm{T}Q$.

De acuerdo con todo esto, se observa que es equivalente dar una variación de la curva γ en el sentido de la aplicación μ, o un campo X con las condiciones indicadas. Igualmente se obtienen las variaciones de $\tilde{\gamma}$ mediante $\tilde{\mu}$ o $\tilde{X}$. Por consiguiente, en lo sucesivo se identificarán ambas ideas de variación de una curva.

Definición 77 *Una curva γ es un* extremo local del funcional L *si, para toda variación $\mu \circ X$ de γ se verifica*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} \int_{\tilde{\mu}_s} \mathcal{L}\mathrm{d}t = 0$$

En lo que concierne a este concepto, la relación entre las dos formas de entender la variación es la siguiente:

Proposición 52 *Sea μ o X una variación de γ,*

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} \displaystyle\int_{\tilde{\mu}_s} \mathcal{L}\mathrm{d}t = \int_{\tilde{\gamma}} \mathrm{L}(\tilde{X})\mathrm{d}t = \int_{\tilde{\gamma}} \tilde{X}(\mathcal{L})\mathrm{d}t$.
2. *Si $\alpha \in \Omega^1(\mathrm{T}Q)$ entonces*
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} \int_{\tilde{\mu}_s} \alpha = \int_{\tilde{\gamma}} \mathrm{L}(\tilde{X})\alpha$$

(*Dem.*) Teniendo en cuenta que $\tilde{\mu}_s = \tilde{F}_s \circ \tilde{\gamma}$, se tiene

1.
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} \int_{\tilde{\mu}_s} \mathcal{L}\mathrm{d}t &= \lim_{s \longrightarrow 0} \frac{1}{s}\left(\int_{\tilde{\mu}_s} \mathcal{L}\mathrm{d}t - \int_{\tilde{\mu}_0} \mathcal{L}\mathrm{d}t\right) = \lim_{s \longrightarrow 0} \frac{1}{s}\left(\int_a^b \tilde{\mu}_s^*\mathcal{L}\mathrm{d}t - \int_a^b \tilde{\mu}_0\mathcal{L}\mathrm{d}t\right) \\
&= \int_a^b \lim_{s \longrightarrow 0} \frac{\tilde{\mu}_s^*\mathcal{L} - \tilde{\mu}_0^*\mathcal{L}}{s}\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{L}(\tilde{X})\mathcal{L}\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{X}(\mathcal{L})\mathrm{d}t = \int_{\tilde{\gamma}} \tilde{X}(\mathcal{L})\mathrm{d}t =
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} \int_{\tilde{\mu}_s} \alpha &= \lim_{s \longrightarrow 0} \frac{1}{s}\left(\int_{\tilde{\mu}_s} \alpha - \int_{\tilde{\mu}_0} \alpha\right) = \lim_{s \longrightarrow 0} \frac{1}{s}\left(\int_a^b \tilde{\mu}_s^*\alpha - \int_a^b \tilde{\mu}_0\alpha\right) \\
&= \int_a^b \lim_{s \longrightarrow 0} \frac{\tilde{\mu}_s^*\alpha - \tilde{\mu}_0^*\alpha}{s} = \int_a^b \mathrm{L}(\tilde{X})\alpha = \int_{\tilde{\gamma}} \mathrm{L}(\tilde{X})\alpha\mathrm{d}t =
\end{aligned}$$

■

De acuerdo con este resultado, lo que se busca es la ecuación de las curvas $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow Q$ que verifican $\gamma(a) = P_0$, $\gamma(b) = P_1$ y satisfacen la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} \int_{\tilde{\mu}_s} \mathcal{L}\mathrm{d}t = \int_{\tilde{\gamma}} \mathrm{L}(\tilde{X})\mathrm{d}t = 0$$

para toda variación $\mu \circ X$ de la curva.

Con el fin de obtener una expresión mejor de las ecuaciones de la curva es necesario el siguiente:

Lema 5 *Dada* $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow Q$ *se verifica que*

$$\tilde{\gamma}^*\mathcal{L}\mathrm{d}t + \tilde{\gamma}^* E_{\mathcal{L}}\mathrm{d}t = \tilde{\gamma}^* A_{\mathcal{L}}\mathrm{d}t = \tilde{\gamma}^*\Theta_{\mathcal{L}}$$

(*Dem.*) Sea $t_0 \in [a,b]$ y (q^i, v^i) un sistema de coordenadas canónicas en un entorno de $\tilde{\gamma}(t_0)$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\left((\tilde{\gamma}^* A_{\mathcal{L}})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} &= (\tilde{\gamma}^* A_{\mathcal{L}})(t_0) = A_{\mathcal{L}}(\tilde{\gamma}(t_0)) \\
&= \left(v^i\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}\right)(\tilde{\gamma}(t_0)) = \left(v^i\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}\right)(\gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0)) \\
&= \dot{\gamma}(t_0)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}\Big|_{\tilde{\gamma}(t_0)}
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\left((\tilde{\gamma}^*\Theta_{\mathcal{L}})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} &= \Theta_{\mathcal{L}}\left(\mathrm{T}_{t_0}\tilde{\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = (\mathrm{d}\mathcal{L} \circ J)\left(\mathrm{T}_{t_0}\tilde{\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t_0}\right) \\
&= (\mathrm{d}\mathcal{L} \circ J)\left(\dot{\gamma}^i(t_0)\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{\tilde{\gamma}(t_0)} \ddot{\gamma}^i(t_0)\frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{\tilde{\gamma}(t_0)}\right) \\
&= (\mathrm{d}\mathcal{L})\left(\dot{\gamma}^i(t_0)\frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{\tilde{\gamma}(t_0)}\right) = \dot{\gamma}^i(t_0)\frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{\tilde{\gamma}(t_0)}
\end{aligned}$$

y de ahí el resultado se obtiene de forma inmediata. ∎

5.1.3 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Ahora ya se está en condiciones de determinar las ecuaciones para γ. Se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\int_{\tilde{\mu}_s}\mathcal{L}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\int_a^b \tilde{\mu}_s^*\mathcal{L}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\int_a^b \tilde{\mu}_s^*\Theta_{\mathcal{L}} - \tilde{\mu}_s^* E_{\mathcal{L}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\int_{\tilde{\mu}_s}\Theta_{\mathcal{L}} - E_{\mathcal{L}}\mathrm{d}t = \int_{\tilde{\gamma}}\mathrm{L}(\tilde{X})\Theta_{\mathcal{L}} - \tilde{X}(E_{\mathcal{L}})\mathrm{d}t = \int_{\tilde{\gamma}}\mathrm{d}\,i(\tilde{X})\mathrm{d}\Theta_{\mathcal{L}} + i(\tilde{X})\mathrm{d}\Theta_{\mathcal{L}} - \tilde{X}(E_{\mathcal{L}})\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

pero $\displaystyle\int_{\tilde{\gamma}}\mathrm{d}\,i(\tilde{X})\mathrm{d}\Theta_{\mathcal{L}} = 0$, por el teorema de Stokes y teniendo en cuenta que $\tilde{X}(P_0) = 0 = \tilde{X}(P_1)$; de ahí

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\tilde{\gamma}} i(\tilde{X})\mathrm{d}\Theta_{\mathcal{L}} - \tilde{X}(E_{\mathcal{L}})\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{\gamma}^*(i(\tilde{X})\mathrm{d}\Theta_{\mathcal{L}}) - \tilde{\gamma}^*\tilde{X}(E_{\mathcal{L}})\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b [\mathrm{d}\Theta_{\mathcal{L}}(\tilde{X}, (\mathrm{T}_t\tilde{\gamma})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}) - \tilde{X}(E_{\mathcal{L}})(\tilde{\gamma}(t))]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

ya que

$$[\tilde{\gamma}^*(i(\tilde{X})\mathrm{d}\Theta_{\mathcal{L}}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_t = (i(X)\mathrm{d}\Theta_{\mathcal{L}})\left(\mathrm{T}_t\tilde{\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = (d\Theta_{\mathcal{L}})_{\tilde{\gamma}(t)}\left(\tilde{X}, \mathrm{T}_t\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$$

de donde

$$0 = \int_a^b i(\tilde{x}_{\tilde{\gamma}(t)}\left[-i\left(\mathrm{T}_t\tilde{\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\Theta_{\mathcal{L}} - \mathrm{d}E_{\mathcal{L}}\right]\mathrm{d}t$$

Pero $\tilde{X}$ es un campo arbitrario, luego teniendo en cuenta que $\mathrm{T}_t\tilde{\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = (\tilde{\gamma}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t))$ se obtiene que

$$- i(\tilde{\gamma}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t))\mathrm{d}\Theta_{\mathcal{L}} = \mathrm{d}E_{\mathcal{L}}$$

y, dado que $-\mathrm{d}\Theta_{\mathcal{L}} = \Omega_{\mathcal{L}}$, resulta que

$$i(\tilde{\gamma}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t))\Omega_{\mathcal{L}} = \mathrm{d}E_{\mathcal{L}}$$

(Obsérvese que $(\tilde{\gamma}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t))$ no es mas que el vector tangente a la curva $\tilde{\gamma}(t)$.

Si se considera que las curvas $\tilde{\gamma}(t)$ son curvas integrales de un campo vectorial $X_{\mathcal{L}} \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$, como conclusión, y dado que la curva $\tilde{\gamma}$ es la subida canónica a $\mathrm{T}Q$ de una curva en Q, se tiene que dicho campo ha de verificar

1. $i(X_{\mathcal{L}})\Omega_{\mathcal{L}} = \mathrm{d}E_{\mathcal{L}}$
2. $X_{\mathcal{L}}$ es una E.D.S.O. ($J(X_{\mathcal{L}}) = \Delta$)

y estas, como ya se ha comentado anteriormente, son la expresión geométrica de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Una última observación es que, aun cuando se ha dicho que $\tilde{X}$ es arbitrario, eso no es correcto: el que lo es es X. No obstante, la forma $i\left(\mathrm{T}_t\tilde{\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\Theta_{\mathcal{L}} + \mathrm{d}E_{\mathcal{L}}$ es semibásica, por lo que sólo depende de X y no de su subida $\tilde{X}$ a $\mathrm{T}Q$.

5.1.4 Relación con el formalismo hamiltoniano canónico

En la presentación axiomática del formalismo hamiltoniano se comentó que las ecuaciones dinámicas podían ser obtenidas a partir de un principio variacional. Vamos a aprovechar la discusión que se acaba de efectuar sobre la equivalencia entre los formalismos lagrangiano y hamiltoniano canónico para comentar brevemente la relación entre los principios variacionales en uno y otro formalismo.

Partiendo del principio variacional del formalismo lagrangiano y teniendo en cuenta las relaciones entre los elementos geométricos y dinámicos de ambos formalismos; si $\mathcal{FL}\colon \mathrm{T}Q \longrightarrow \mathrm{T}^*Q$ la transformación de Legendre definida por la lagrangiana $\mathcal{L}$ y $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow Q$ es una curva se tiene que

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_{\tilde{\gamma}} \mathcal{L}\mathrm{d}t = \int_{\tilde{\gamma}} \Theta_{\mathcal{L}} - E_{\mathcal{L}}\mathrm{d}t = \int_{\tilde{\gamma}} \mathcal{FL}^*\Theta - \mathcal{FL}^*h\mathrm{d}t \\ &= \int_{\tilde{\gamma}} \mathcal{FL}^*(\Theta - h\mathrm{d}t) = \int_{\mathcal{FL}\circ\tilde{\gamma}} \Theta - h\mathrm{d}t \end{aligned}$$

de donde, si la curva γ es solución del problema variacional de Hamilton (del formalismo lagrangiano), entonces la curva $\mathcal{FL} \circ \tilde{\gamma}$ lo es del siguiente problema variacional: determinar curvas $\zeta\colon [a,b] \longrightarrow \mathrm{T}^*Q$ con extremos fijos tales que el funcional

$$H(\zeta) := \int_\zeta \Theta - h\mathrm{d}t$$

sea extremal.

Efectuando un cálculo análogo al anterior (aunque algo más sencillo al no haber subidas canónicas) se obtiene que las curvas solución satisfacen las ecuaciones de Hamilton.

En los textos de Mecánica se recogen todos estos resultados de la siguiente manera:

Principios de mínima acción *Dado un sistema lagrangiano* $(\mathrm{T}Q, \mathcal{L})$ *y su sistema hamiltoniano canónico asociado* $(\mathrm{T}^*Q, \Omega, h)$*, se tiene:*

Principio de mínima acción de Hamilton*: La dinámica asociada al problema lagrangiano* $(\mathrm{T}Q, \mathcal{L})$ *está dada por las curvas* $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow Q$ *con extremos fijos que hacen mínimo el funcional*

$$L(\gamma) := \int_{\tilde{\gamma}} \mathcal{L}\mathrm{d}t$$

Principio de mínima acción de Hamilton-Jacobi*: La dinámica asociada al problema hamiltoniano* (T^*Q, h) *está dada por las curvas* $\zeta\colon [a,b] \longrightarrow \mathrm{T}^*Q$ *con extremos fijos que hacen mínimo el funcional*

$$H(\zeta) := \int_{\zeta} \Theta - h\mathrm{d}t$$

Agradecimientos

References

[1] R. Abraham, J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics* (2nd ed.), Addison-Wesley, Reading, 1978. 61, 72

[2] V.I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*. Graduate Texts in Mathematics **60**. Springer-Verlag, New York, 1989. 65

[3] M. Crampin, "Tangent bundle geometry for Lagrangian dynamics", *J. Phys. A: Math. Gen.* bf 16 (1983) 3755–3772.

[4] A. Echeverría-Enríquez, L.A. Ibort, M.C. Muñoz-Lecanda, N. Román-Roy, "Invariant forms and groups of automorphisms of multisymplectic manifolds", Preprint 1996. 54

[5] A. Echeverría-Enríquez, M.C. Muñoz-Lecanda, N. Román-Roy, "Geometrical setting of time-dependent regular systems. Alternative models", *Rev. Math. Phys.* **3**(3) (1991) 301-330. 40

[6] J. Gomis, J. Llosa, N. Román-Roy, "Lee Hwa Chung theorem for presymplectic manifolds. Canonical transformations for constrained systems", *J. Math. Phys.* **25**(5) (1984) 1348-1355. 56

[7] X. Gràcia, J.M. Pons, N. Román-Roy, "Higher order lagrangian systems: geometric structures, dynamics and constraints", *J. Math. Phys.* **32**(10) (1991) 2744-2763. 40

[8] L. Hwa Chung, "The Universal Integral Invariants of hamiltonian Systems and Application to the Theory of Canonical transformations", *Proc. Roy. Soc.* **LXII A** (1945) 237-246. 54

[9] L.A. Ibort, "Estructura geométrica de los sistemas con simetría en mecánica clásica y teoría clásica de campos". *Ph. D. tesis*, Univ. Zaragoza (1984).

[10] R. Kuwabara, "Time-dependent mechanical symmetries and extended hamiltonian systems ", *Rep. Math. Phys.* **19** (1984) 27-38. 40

[11] M. de León, P.R. Rodrigues, *Generalized Classical Mechanics and Field Theory*, North-Holland Math. Studies **112**, Elsevier, Amsterdam, 1985. 40

[12] P. Libermann, C.M. Marle, *Symplectic geometry and analytical dynamics*, D. Reidel Publisging Company, Dordrecht, 1987. 41

[13] J. Llosa, N. Román-Roy, "Invariant forms and hamiltonian Systems: A Geometrical Setting", *Int. J. Theor. Phys.* **27** (12) (1988) 1533-1543. 54

[14] C. López, E. Martínez, M.F. Rañada, "Dynamical Symmetries, non-Cartan Symmetries and Superintegrability of the n-Dimensional Harmonic Oscillator ", *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999) 1241-1249. 68

[15] W. Sarlet, F. Cantrijn, "Higher-order Noether symmetries and constants of the motion", *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** (1981) 479-492. 68

[16] J.M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1969. 49

[17] J.E. Marsden, A. Weinstein, "Reduction of symplectic manifolds with symmetry", *Rep. Math. Phys.* **5** (1974) 121-130. 65

[18] J.E. Marsden, A. Weinstein, "Some comments on the History, Theory, and Applications of Symplectic Reduction", *Quantization of singular symplectic quotiens*. N. Landsman, M. Pflaum, M. Schlichenmanier eds., Birkhauser, Boston (2001) 1-20. 65